现代数学丛书

高维动力系统的周期轨道：理论和应用

李炳熙 著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

目　　录

1. 引　　言

考虑微分系统

$$\dot{x}=F(x), \tag{1.1}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$, $F: M\to\mathbb{R}^n$, $M\subset\mathbb{R}^n$ 为一区域, $F\in C^1(M)$. 设(1.1)的解 $x(t)=g(t, x_0)$, $g(0, x_0)=x_0$, 对一切 $t\in\mathbb{R}^1$ 存在. 可微映射 $g^t: x\mapsto g(t, x)$, 和 $(g^t)^{-1}$ 构成一个单参数微分同胚群. 这个群连同相空间 M 一起, 就是一个动力系统. 过某固定点 $p\in M$ 的轨道 $\Gamma(p)$, 是下列集合:

$$\Gamma(p)=\{x\in\mathbb{R}^n|\exists(t, p)\in\mathbb{R}^1\times M \text{ 使得 } g(t, p)=x\}.$$

轨道的拓扑类型有三种: (甲)一点; (乙) 一条 Jordan 曲线; (丙) 定义在 $\mathbb{R}^1$ 上的一条正则可微曲线. 它们分别对应于系统(1.1)的一个常数解, 一个非常数周期解, 一个非周期解. 在情形 (甲), 有 $g(t, p)\equiv p$; 在情形 (乙), 有 $g(t+T, p)\equiv g(t, p)$, 这里, T 是最小正周期; 在情形(丙), 曲线上每点的切向量不为零, 而且 $t\neq t'\Rightarrow g(t, p)\neq g(t', p)$, $g(t,p)$ 描画出一条非周期轨道. 这时, 曲线可能不是 $\mathbb{R}^1$ 的同胚象(例如, 双谐和振荡器方程 $\ddot{x}+k^2x=0$, $\ddot{y}+l^2y=0$, $k>0$, $l>0$; 它们等价于 $\mathbb{R}^4$ 上的微分系统 $\dot{x}=u$, $\dot{u}=-k^2x$, $\dot{y}=v$, $\dot{v}=-l^2y$; 当 k/l 是无理数, 存在 $\mathbb{R}^4$ 中的二维环面 T^2, 其上的轨道不是周期的, 此轨道不是 $\mathbb{R}^1$ 的同胚象). 本书的周期轨道均指

(乙)这类型.

当$n\geqslant 3$, (1.1)的周期轨道的存在性、不存在性、唯一性和稳定性等问题, 在理论上和应用上, 都值得研究. 在二维动力系统, 研究周期轨道的存在性的基本工具是 Poincaré-Bendixson 定理及其推论(环域原理). 1963 年, Schwartz 把 Poincaré-Bendixson 定理推广到紧致、连通的二维 C^2 流形上的微分系统. D'Heedene 的反例显示 Poincaré-Bendixson 定理在高维情形没有简单的推广. 1979 和 1980 年, Smith 在附加若干条件之下把此定理推广到下列两类微分系统: $f(D)x+b\phi(g(D)x)=0$ 及 $Dx=f(x)$. 至于 Poincaré-Bendixson 的环域原理, Schweitzer 在 1974 年发表的、令人有深刻印象的反例, 使此原理在高维情形的简单推广成为不可能(指 C^1 情形; 在 C^r, $r\geqslant 2$ 情形, 这仍是个有兴趣但困难的、尚未解决的问题)[注]. 因此, 多年来, 在 $n(\geqslant 3)$ 维动力系统研究周期轨道存在性时, 多依赖于"环区原理". 三十多年来, 此原理曾成功地被用来处理电子学、力学、自动控制、原子物理学、生物学、化学及其它方面的高维动力系统周期轨道存在问题. 但是由于"环区原理"的复杂几何结构, 实际上它是很难应用的. 故需另寻良法. 上述 Smith 的推广提供一种选择. Brouwer 不动点定理是环区原理的基础, Королев 在 1965 年试图运用 Banach 不动点定理处理系统(1.1)的周期轨道存在和唯一问题, 但没成功. 应用环区原理时, 需要寻找一个正向不变环区, 这个过程有时可能是十分困难的; 对于某类方程, 例如描写生态系统的方程, 寻找正向不变球体是更为可行的. 1977 年, Grasman 应用映射的 Brouwer 度理论, 沿此方向探讨, 获得一组保证系统(1.1)存在非常数周期解的充分条件($n\geqslant 3$). 此外, 直接研究系统 (1.1) 的 Poincaré 映射是否存在不动点以及是否唯一, 近年来亦广泛见诸文献.

[注]　Alan Weinstein(美国加州大学——UC Berkeley)告诉作者, UC Berkeley 数学系的 Jenny Harrison 在 C^2 情形构造了反例.

考虑二维系统 $\dot{x}_1=ax_2+f_1(x_1, x_2)$, $\dot{x}_2=-ax_1+f_2(x_1, x_2)$ 其中 $f_i(x_1, x_2)$ 是高次项,这系统不一定有周期解. 一个古典的结果(Poincaré)指出,若 f_1, f_2 满足对称条件:

$$f_1(x_1, -x_2)=-f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, -x_2)=f_2(x_1, x_2),$$

则该系统在原点的某邻域内有周期解(周期接近于 $2\pi/|a|$). 1979年, Podolak 及 Westreich 把此结果推广到 n 维情形.

至于 Hamilton 系统的周期解存在性问题,近年来 Weinstein, Moser, Rabinowitz 等获得了相当好的结果.

奇异摄动问题的周期解存在性, 1950 年前后 Friedrichs, Wasow, Levinson 等做了若干重要工作, 1960 年前后又有 Понтрягин 等人的工作.

Bendixson 准则是研究二维动力系统不存在周期轨道的工具,但在高维情形,工作较少.

高维动力系统的周期轨道唯一性的研究, 已发表的工作亦不多. 1960 年, Borg 发表了一个关于系统(1.1)的周期轨道唯一性定理. 后来, Sherman 成功地应用它研究了一个原子物理方面的三维动力系统. 虽然如此, 这定理是难以应用的. 其余有关的结果, 都是针对具体情况设计特殊方法, 去证明周期轨道的唯一性的.

关于系统 (1.1) 的周期轨道的稳定性, 1979 年 Franke 及 Selgrade 利用大范围分析与数值分析的技巧, 去判定周期轨道的稳定性. 另一方面, $n=2$ 时, Poincaré 稳定性准则是熟知的保证周期轨道渐近稳定的方法. 1979 年, Churchill 及 Selgrade 把此准则推广到高维动力系统.

以上就是此专题现状的梗概. 本书将依次总结这方面的主要结果,并用较多篇幅介绍应用. 以下各章为:

2. Poincaré-Bendixson 定理及其推广;

3. 周期轨道的存在性;

4. 周期轨道的不存在性；

5. 周期轨道的唯一性；

6. 周期轨道的稳定性；

7. 应用。

有关的基本概念和结果，可参考：秦元勋 [1]，叶彦谦 [2]，Arnold [3]，Coddington 与 Levinson [4]，Hale [5]，Hartman [6]，Hirsch 与 Smale [7]，Немыцкий 与 Степанов [8]．至于 Hopf 分枝理论(本书不拟涉及)，可参考 Marsden 与 McCracken [9]，Hsu 与 Kazarinoff[10]，Hassard 与 Wan [11]，Chow 与 Hale[215]，等等．有关的研究结果及应用，还可参考综合报告：Atherton 与 Dorrah[211]（这主要涉及二维系统，对 $n\geqslant3$ 维系统亦有涉及)，李炳熙[212]。

2. Poincaré–Bendixson 定理及其推广

研究平面动力系统周期轨道存在性的基本工具是下述著名的古典结果：

定理 2.1(Poincaré-Bendixson)　设 Ω 是系统 (1.1) 的有界极小集合($n=2$)，则 Ω 或者是一奇点，或者是一周期轨道。

其证明参见原始文献 Poincaré[12] 及 Bendixson [13]，或参考秦元勋 [1]，Coddington 与 Levinson [4]，Hale[5]，Hirsch 与 Smale[7]，Немыцкий 与 Степанов[8] 等。

2.1 Schwartz 定理

1963 年，Schwartz[14] 把此定理推广到紧致、连通的二维 C^2 流形上的微分系统。

定理 2.2 (Schwartz)　设 $\mathfrak{M}$ 为紧致、连通的 C^2 微分流形，$\phi:\mathbb{R}^1\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ 为 C^2 动力系统，$\Omega\subset\mathfrak{M}$ 是一极小集合，则 Ω 必为下列三者之一：

（甲）由一奇点组成的单点集；

（乙）一条与 S^1 同胚的闭轨道；

或

（丙） $\Omega=\mathfrak{M}$，而 $\mathfrak{M}$ 同胚于二维环面 T^2.

证明 设 $\Omega\subset\mathfrak{M}$ 为动力系统 ϕ 之极小集合。则 Ω 可以是下列三种情况之一：

（甲） 一个奇点；

（乙） 一条轨道 Γ，它与 S^1 同胚，即是一条周期轨道；

或

（丙） 一个既不含奇点又不含闭轨道的集合。

情形（丙）又可再分为

$$(一)\ \mathrm{Int}(\Omega)\neq\emptyset;\quad (二)\ \mathrm{Int}(\Omega)=\emptyset.$$

可以证明，（一）$\Rightarrow\Omega=\mathfrak{M}$，且 $\mathfrak{M}$ 同胚于 T^2；而（二）是不成立的. 于是得到本定理之结论.

以下分别证明这两件事.

先证 $\mathrm{Int}(\Omega)\neq\emptyset\Rightarrow\Omega=\mathfrak{M}$ 且 $\mathfrak{M}$ 同胚于 T^2.

注意 Ω 紧致，$\mathrm{Int}(\Omega)\neq\emptyset$，故 $\partial\Omega=\emptyset$（根据 Тумаркин 定理，即：如紧致极小集合有某一点是内点，则它的每一点都是内点，参见 Немыцкий 与 Степанов[8, 第五章]）. 于是 Ω 既开且闭，从而 $\Omega=\mathfrak{M}$. 但 Ω 不含奇点或闭轨道，据 Kneser [15, p. 153] 可得，Ω 与 T^2 同胚.

现来证明（二）不成立. 其证明主要步骤为：$\mathrm{Int}(\Omega)=\emptyset\Rightarrow$ 本动力系统的 Poincaré 映射诱导出一个 C^2 映射 f，f 有七条性质；其次证明两条引理（引理 1 和引理 2）；引理 1 及 2 $\Rightarrow$ 这种多性质的 f 是不存在的；从而（二）不成立. 分述如下：

$\mathrm{Int}(\Omega)=\emptyset$，$\Omega$ 闭集，故 Ω 在 $\mathfrak{M}$ 无处稠密[注]. 注意及 Ω 不含奇点，故存在满足下列条件的 C^2 嵌入 $i:[-1,1]\to\mathfrak{M}$：

（i） $I=i((-1,1))$ 与每条和它相交的轨道无切；

（ii） $i(-1)$ 及 $i(+1)$ 不属于 Ω；

[注] 设有度量空间 (X, d)，$\Omega\subset X$，以下三条性质是等价的：1° Ω 在 X 无处稠密；2° $\overline{\Omega}$ 满足条件：$\mathrm{Int}(\overline{\Omega})=\emptyset$；3° $X\setminus\overline{\Omega}$ 在 X 稠密.

(iii) $i(0)\in\Omega$.

于是存在 $\sigma>0$，使得如下定义的映射 δ 是微分同胚：

$$\delta:\{(s,\ \tau)\in\mathbb{R}^2\mid|s|<\sigma,\ |\tau|<1\}\to\mathfrak{M},$$
$$\delta(s,\ \tau)=\phi(s,\ i(\tau)).$$

因此，可取 δ^{-1} 为 $i(0)$ 邻域的坐标系，而 I 可取作 ϕ 的一局部截线．由 Poincaré 映射 $h:I\to I$ 可诱导出一个 C^2 映射 f 如下：

令 $\qquad U=\{x\in I\mid\exists t>0,\ 使得\ \phi(t,\ x)\in I\}.$

因为 Ω 是紧致极小集合，所以 $U\neq\emptyset$．$\forall x\in U$，令

$$t_x=\min\{t\mid t>0,\ \phi(t,\ x)\in I\}.$$

记 $i^{-1}(U)$ 为 V，显然 $V\subset(-1,\ 1)$．定义 $f:V\to(-1,\ 1)$ 为

$$f(v)=i^{-1}(\phi(t_{i(v)},\ i(v))),\ \forall v\in V.$$

当 $|v-v_0|$ 充分小时，有

$$f(v)=\pi(\delta^{-1}(\phi(t_{i(v_0)},\ i(v)))),$$

其中 $\pi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ 为投射 $\pi(\xi,\ \eta)=\eta$．注意及 $i,\ \phi,\ \delta$ 都是 C^2 映射，π 是 C^∞ 映射，所以 f 是 C^2 映射．以下列出 f 所具有的七条性质．

因 $\Omega\subset\mathfrak{M}$ 是紧致极小集合，所以 $\overline{\Gamma}_\omega=\Omega$，$\forall\omega\in\Omega$，这里 $\Gamma_\omega=\{\phi(t,\ \omega)\mid t\in\mathbb{R}^1\}$，$\overline{\Gamma}_\omega$ 表示 Γ_ω 的闭包．令

$$G=i^{-1}(I\cap\Omega),$$

故 $G\subset V$，而且是无处稠密、完全集．取 $(-1,\ 1)$ 中满足条件

$$G\subset W\subset\overline{W}\subset V$$

的开集 W．可以证明（见后面的 [注 2]），映射 f 有下列七条性质：

① $G=(-1,\ 1)\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,\ b_i)\subset W$；

② $f:W\to(-1,\ 1)$；

③ $f(G)=G$；

④ $f^k(g)=g,\ g\in G\Rightarrow k=0$；这里 $f^k(g)=f^{k-1}(f(g))$，$f^0=id$；

⑤ $\exists L,\ F\in\mathbb{R}^1,\ 0<L<1<F$，使得

$$L\leqslant|f'(w)|\leqslant F,\ \forall w\in W;$$

⑥ $|f''(w)|\leqslant M,\ \forall w\in W;$

⑦ 令 $B(k,\ g)=f^k(g),\ g\in G$；则 G 是 B 作用下的极小集合.

现来证明两条引理(即引理1和引理2).

引理1 存在毗邻区间 $(a,\ b)$，使得 $a,\ b\in G,\ a<b$，而且

$$f^k((a,\ b))\subset W,\ \forall k\geqslant 0,\ k\ \text{为整数}.$$

引理1证明 令

$$\mu=\text{dist}(G,\ (-1,\ 1)\backslash W),$$

$$S=\{j\,|\,b_j-a_j\geqslant\mu\},$$

$$Y=\{a_j,\ b_j\,|\,j\in S\}.$$

注意到上述性质①，即 $G=(-1,\ 1)\backslash\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,\ b_i)\subset W$，所以 S 和 Y 都是有限集.

($1°$) f 的性质 ④ $\Rightarrow\exists N\in\mathfrak{N}$，使得 $f^k(a_1)\notin Y,\ \forall k\geqslant N$，这里 $\mathfrak{N}$ 表自然数集.

事实上，Y 是有限集，设

$$Y=\{a_{i_1},\ b_{i_1},\ \cdots,\ a_{i_s},\ b_{i_s}\}.$$

若 $f^k(a_1)\notin Y,\ \forall k\geqslant 0$，则取 $N=1$. 若存在 λ_1 (取这种 λ_1 中之最小者)使

$$f^{\lambda_1}(a_1)\in Y,$$

则有两种可能性：$f^{k+\lambda_1}(a_1)\notin Y,\ \forall k>0$，则取 $N=\lambda_1+1$；或存在 λ_2 (取这种 λ_2 中之最小者)使得 $f^{\lambda_2+\lambda_1}(a_1)\in Y$. 对于后一情形，又有两种可能：

$$f^{k+\lambda_2+\lambda_1}(a_1)\notin Y,\ \forall k>0\quad(\text{这时，取}\ N=\lambda_2+\lambda_1+1);$$

或存在 λ_3(取其最小者)，使得

$$f^{\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1}(a_1)\in Y.$$

如此类推. 设存在 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\sigma$, 使得($\lambda_i\geq 1$, $\forall i$)

$$f^{\lambda_\sigma+\lambda_{\sigma-1}+\cdots+\lambda_2+\lambda_1}(a_1)\in Y.$$

则由性质 ④ 得

$$f^{\lambda_\sigma+\lambda_{\sigma-1}+\cdots+\lambda_2+\lambda_1}(a_1)\neq f^k(a_1),$$

$$k=\lambda_1,\ \lambda_1+\lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\sigma.$$

因 Y 是有限集, 上述过程必在有限步内终止. 故存在 $N\in\mathfrak{N}$, 使得

$$f^k(a_1)\notin Y,\ \forall k\geq N.$$

(2°) 其次, 由性质 ③ 和性质 ⑤, 可推得: f 把毗邻区间的端点变为毗邻区间的端点. 事实上, 设 (a_l, b_l) 为 G 的某毗邻区间, 由性质 ③ 知, $f(a_l), f(b_l)\in G$, 因 G 无处稠密, 故 $f(a_l), f(b_l)$ 为毗邻区间的端点; 又由性质 ⑤ 知, $f'(w)\neq 0, \forall w\in W$, 故 $f(a_l)$, $f(b_l)$是同一个毗邻区间的端点.

于是, 由 (1°)和 (2°)知: $f^k(a_1)\notin Y$, $f^k(b_1)\notin Y$, $\forall k\geq N$; 而且对某 j, 有 $f^N(a_1)=a_j$ 或 $f^N(a_1)=b_j$; 为确定计, 设 $f^N(a_1)=a_j$, 从而 $f^N(b_1)=b_j$. 令 $k=m+N, m\geq 0$. 于是由 Y 的定义,

$$|f^m(a_j)-f^m(b_j)|=|f^m(f^N(a_1))-f^m(f^N(b_1))|$$
$$=|f^k(a_1)-f^k(b_1)|<\mu.$$

从而
$$f^m((a_j, b_j))\subset W,\ \forall m\geq 0.$$

于是, 取$(a, b)=(a_j, b_j)$, 即得本引理.

引理 2 设 $N\in\mathfrak{N}$ (自然数集)及$[p, q]\subset(-1, 1)$使得

$$f^k([p, q])\subset W,\ \forall k\in\{0, 1, \cdots, N\}$$

成立, 则有下列两公式:

$$f^{k+1}(p)-f^{k+1}(q)=(Df^{k+1})(w)\cdot(p-q), \tag{2.1}$$

其中 $w\in(p, q)$; 以及

$$|(Df^{k+1})(u)|\cdot|(Df^{k+1})(v)|^{-1}$$
$$\leq\exp\left[ML^{-1}\sum_{j=0}^{k}|f^j(p)-f^j(q)|\right], \tag{2.2}$$

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, N\} \quad 及 \quad u, v \in [p, q].$$

这里$(Dg)(x)=g'(x)$.

引理 2 的证明 先证公式(2.1). 因$f: W \to (-1, 1)$, 且$f^k([p, q]) \subset W$, 故$f^{k+1}(p)$, $f^{k+1}(q)$皆有定义,对映射f^{k+1}使用微分中值定理,即得(2.1).

至于公式(2.2), 由性质 ⑤ 知$|f'| \neq 0$, 故可定义辅助函数

$$\Sigma = \log |(Df^{k+1})(u)| \cdot |(Df^{k+1})(v)|^{-1},$$

而且可推得

$$|f^j(u) - f^j(v)| \leqslant |f^j(p) - f^j(q)|, \quad \forall j = 0, 1, \cdots, k.$$

于是连同中值定理及性质 ⑥ (即$|f''| \leqslant M$), 可得

$$\begin{aligned}
\Sigma &\leqslant \sum_{j=0}^{k} \left| \log |(Df)(f^j(u))| - \log |(Df)(f^j(v))| \right| \\
&= \sum_{j=0}^{k} |(Df)(f^j(w_j))|^{-1} \cdot |(D^2 f)(f^j(w_j))| \cdot |f^j(u) - f^j(v)| \\
&\leqslant ML^{-1} \sum_{j=0}^{k} |f^j(u) - f^j(v)| \\
&\leqslant ML^{-1} \sum_{j=0}^{k} |f^j(p) - f^j(q)|,
\end{aligned}$$

从而有

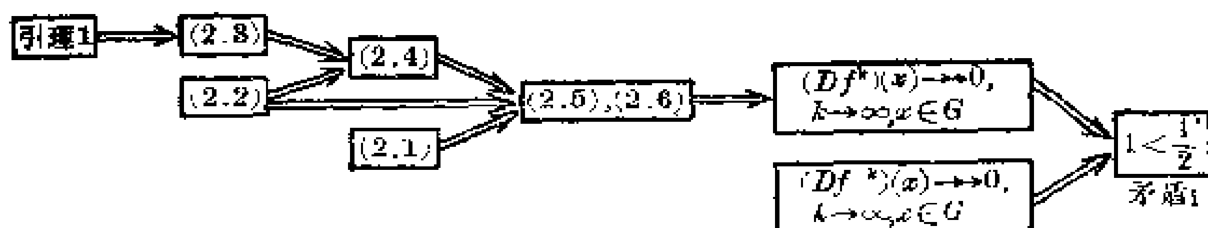
$$|(Df^{k+1})(u)| \cdot |(Df^{k+1})(v)|^{-1} \leqslant \exp\left[ML^{-1} \sum_{j=0}^{k} |f^j(p) - f^j(q)| \right],$$

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, N\} \quad 及 \quad u, v \in [p, q].$$

是为公式(2.2).

以下, 运用引理 1, 引理 2 证明: 具有上述七条性质的映射f是不存在的, 从而得出定理 2.2.

证明梗概见下表:



▲ 现来证明：引理 1⇒(2.3)，即对某集 $\{w_k\}\subset(a,\ b)$，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}|(Df^k)(w_k)|\leqslant 2(b-a)^{-1}. \tag{2.3}$$

事实上，引理 1⇒$|f^k(a)-f^k(b)|\leqslant\mu_k,\ \forall k\geqslant 0$，这里 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mu_k\leqslant 2$。于是，

$$\sum_{k=0}^{\infty}|(Df^k)(w_k)||b-a|=\sum_{k=0}^{\infty}|f^k(a)-f^k(b)|$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\leqslant 2,\ \{w_k\}\subset(a,\ b).$$

从而 $\quad\sum\limits_{k=0}^{\infty}|(Df^k)(w_k)|\leqslant 2(b-a)^{-1},\ \{w_k\}\subset(a,\ b)$。

▲ 证明：(2.2)，(2.3)⇒(2.4)，即

$$\sum_{k=0}^{\infty}|(Df^k)(a)|\leqslant 2(b-a)^{-1}\exp[2ML^{-1}]. \tag{2.4}$$

注意到，由引理 1 知，

$$f^k((a,\ b))\subset W,\ \forall k\geqslant 0.$$

取 $\varepsilon>0$ 充分小，使 $\{w_k\}\subset[a+\varepsilon,\ b-\varepsilon]$，在 (2.2) 中取 $u=a+\varepsilon$，$v=w_k$，$p=a+\varepsilon$，$q=b-\varepsilon$，得

$$|(Df^k)(a+\varepsilon)|\cdot|(Df^k)(w_k)|^{-1}$$
$$\leqslant\exp\Big[ML^{-1}\sum_{j=0}^{k-1}|f^j(a+\varepsilon)-f^j(b-\varepsilon)|\Big]$$
$$\leqslant\exp[2ML^{-1}],\ \forall k\geqslant 0.$$

再利用(2.3)和 f 是 C^2 映射，当 $\varepsilon\to 0$，可得

$$\Delta=\sum_{k=0}^{\infty}|(Df^k)(a)|\leqslant\Big[\sum_{k=0}^{\infty}|(Df^k)(w_k)|\Big]\exp[2ML^{-1}]$$
$$\leqslant 2(b-a)^{-1}\exp[2ML^{-1}].$$

所以，$0<\Delta<\infty$。而且若令

$$\nu=\mu L[6(\Delta+1)(M+1)]^{-1},$$

可见 $0<\nu$，且

$$ML^{-1}\nu e\Delta = e\mu\Delta M/6(\Delta+1)(M+1) < e\mu/6 < \frac{1}{2}\mu < 1.$$

这里，$e \simeq 2.71828$.

▲ 现用 (2.1), (2.2), (2.4) 以及数学归纳法证明 (2.5) 及 (2.6)：

$$|f^k(x) - f^k(a)| < \mu, \tag{2.5}$$

$$|(Df^k)(x)| < e|(Df^k)(a)|, \tag{2.6}$$

这里，$x \in \mathbb{N}(\nu) = \{y \in \mathbb{R}^1 \mid |y-a| < \nu\}$，$k$ 为整数，$k \geqslant 0$.

事实上，当 $k=0$，(2.5)，(2.6)显然成立．作归纳法假设：

$$(2.5),\ (2.6) \quad \text{当} \quad 0 \leqslant k \leqslant N \quad \text{成立}. \tag{*}$$

依次运用(2.2)，(2.1)，(*)，(2.4)，可推出

$$\begin{aligned}
&|(Df^{N+1})(x)| \cdot |(Df^{N+1})(a)|^{-1} \\
&\leqslant \exp\left[ML^{-1}\sum_{k=0}^{N}|f^k(x) - f^k(a)|\right] \\
&\leqslant \exp\left[ML^{-1}\sum_{k=0}^{N}|(Df^k)(u_k)|\,|x-a|\right] \\
&< \exp\left[ML^{-1}\nu e\sum_{k=0}^{N}|(Df^k)(a)|\right] \\
&< \exp[ML^{-1}\nu e\Delta] < \exp[1] = e,
\end{aligned}$$

是为 $k=N+1$ 时的 (2.6)，再连同 (2.1)，可推出 $k=N+1$ 时的 (2.5)．因此，对一切整数 $k \geqslant 0$，(2.5)，(2.6)成立．

▲ (2.4)，(2.6) 及性质 ⑦，性质 ⑤ ⇒ $(Df^k)(x) \rightarrow\rightarrow 0$，$k \to \infty$，$x \in G$.

事实上，首先由(2.4)和(2.6)知

$$(Df^k)(x) \rightarrow\rightarrow 0, \quad k \to \infty,\ x \in \mathbb{N}(\nu).$$

现把此结果扩大到 $x \in G$．注意到 $G = f^p(G)$，$f^p(\mathbb{N}(\nu) \cap G) \subset G$，$\forall p = 0, \pm 1, \cdots, \pm n, \cdots$．集合

$$\mathbb{K} = \bigcup_p \{f^p(\mathbb{N}(\nu) \cap G)\},\ p \in \mathbb{Z}.$$

有下列性质：$\mathbb{K} \neq \emptyset$；对于 $B(k, \mathbb{K}) = f^k(\mathbb{K})$ 来说，$\mathbb{K}$ 是不变集；又

因 $\mathbb{K}\subset G$, 由性质 ⑦, G 是 B 的极小集合, 故 $\mathbb{K}=G$, 从而

$$\{f^p(\mathbb{N}(\nu)\cap G)\mid p\in\mathbb{Z}\}$$

是 G 的一个覆盖. G 是紧致集, 故存在有限子覆盖

$$f^{p_1}(\mathbb{N}(\nu)\cap G),\ \cdots,\ f^{p_l}(\mathbb{N}(\nu)\cap G).$$

因此, 只要证明: 在每个 $f^{p_i}(\mathbb{N}(\nu)\cap G)$, $i=1,\ \cdots,\ l$, 上 $(Df^k)(x)\to\to 0$, $k\to\infty$. 由性质 ⑤, $0<L\leqslant|f'(w)|\leqslant F$, $\forall w\in W$. 任取 $x\in f^p(\mathbb{N}(\nu)\cap G)$, 有

$$|(Df^k)(f^p(x))|\leqslant F^p|(Df^k)(x)|,\qquad p>0.$$

$$|(Df^k)(f^p(x))|\leqslant L^{-|p|}|(Df^k)(x)|,\quad p<0.$$

因此,

$$(Df^k)(x)\to\to 0,\ k\to\infty,\ x\in f^{p_i}(\mathbb{N}(\nu)\cap G),\ i=1,\ \cdots,\ l.$$

由 G 的紧致性, 即得

$$(Df^k)(x)\to\to 0,\ k\to\infty,\ x\in G.$$

从而存在 $N\in\mathfrak{N}$, 使得 $(Df^N)(x)<\dfrac{1}{2}$, $\forall x\in G$.

▲ 以上推理, 完全适用于映射 $f^{-1}:f(W)\to W$, f^{-1} 也有类似于性质 ①～⑦ 的性质, 因此, 可推出

$$(Df^{-k})(x)\to\to 0,\ k\to\infty,\ x\in G.$$

从而存在 $N\in\mathfrak{N}$, 使得 $(Df^{-N})(x)<1$, $\forall x\in G$.

▲ 于是可引出矛盾:

$$1=D(x)=(Df^{-N})(f^N(x))<\frac{1}{2}.$$

至此, 定理 2.2 得证. ∎

[注 1] 定理 2.2(Schwartz) 关于 ϕ 是 C^2 动力系统的假设, 是重要的. 因为 Denjoy [113] 证明了环面 T^2 上的无奇点的 C^1 向量场可以存在例外极小集合 $\mathscr{C}$($\mathscr{C}$ 不是一条闭轨道, 而且 $\mathscr{C}\neq T^2$). 关于 Denjoy 这个例子的构造, 也可参考 Schweitzer[24]的附录.

[注 2] 定理 2.2 证明过程中用到映射 f 的七条性质, 其证明如下:

性质 ①, 即 $G=(-1,\ 1)\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,\ b_i)\subset W$. 这由 G, W 的定义推出.

性质②，即 $f:W\to(-1,1)$. 这是 $f:V\to(-1,1)$ 在 W 上的限制.

性质③：$f(G)=G$. 任取 $v\in G\Rightarrow i(v)\in I\cap\Omega\Rightarrow\exists\phi(t_{i(v)},i(v))\in I\cap\Omega\Rightarrow$ $f(v)=i^{-1}(\phi(t_{i(v)},i(v)))\in i^{-1}(I\cap\Omega)=G\Rightarrow f(G)\subset G$. 同理，可证 $G\subset f(G)$.

性质④：$f^k(g)=g$, $g\in G\Rightarrow k=0$.

可用数学归纳法证明：$k\neq 0\Rightarrow f^k(g)\neq g$, $g\in G$.

$k=1$: 若 $f(g)=g$, $g\in G$, 则 $\phi(t_{i(g)},i(g))=i(g)$, 从而过 $i(g)$ 的轨道是闭轨道，这与 Ω 不含闭轨道相矛盾.

设 $k\leqslant N$, $f^k(g)\neq g$, $g\in G$, 可用上述推理证明 $f^{N+1}(g)\neq g$, $g\in G$.

性质⑤：$0<L\leqslant|f'(w)|\leqslant F$, $\forall w\in W$, $0<L<1<F$.

$f(w)=i^{-1}(\phi(t_{i(w)},i(w)))$ 是 C^2 映射，故 $L\leqslant|f'(w)|\leqslant F$, $\forall w\in W$.

$i(f(w))=\phi(t_{i(w)},i(w))\Rightarrow i'(f(w))f'(w)=\phi'(\cdot,\cdot)i'(w)$. 因 $i'(w)\neq 0$, Ω 不含奇点(从而 $\phi'(\cdot,\cdot)\neq 0$)，所以 $f'(w)\neq 0\Rightarrow L>0$.

至于 $L<1<F$, 理由为：$0\in G$, $f(0)\neq 0$ (性质④)，而且由性质③，$f^n(G)=G$, $n=1,2,\cdots$; 所以存在 $w_1,w_2\in W$, 使 $|f'(w_1)|>1$, $|f'(w_1)|<1$.

性质⑥：$|f''(w)|\leqslant M$, $\forall w\in W$. 因为 i 是 C^2 微分同胚，故 f 是 C^2 映射.

性质⑦：令 $B(k,g)=f^k(g)$, $g\in G$; 则 G 是 B 作用下的极小集合.

首先，$i(0)\in\Omega\cap I\to 0\in G\to G\neq\emptyset$.

其次，可用数学归纳法证明 $f^k(G)=G$, $\forall k$. (性质③).

再有，G 为闭集. 因为 $G=i^{-1}(I\cap\Omega)$, Ω 为无处稠密、完全集，所以 $I\cap\Omega$ 为闭集，i 为 C^2 映射，故 G 为闭集.

所以，G 是极小集合. 事实上，若存在 $Q\subset G$, $Q\neq\emptyset$, $\overline{Q}=Q$, $f^k(Q)=Q$, $\forall k$, $G\backslash Q\neq\emptyset$, 则存在真子集 $\Sigma\subset I\cap\Omega$, $\Sigma\neq\emptyset$, 使得 $Q=i^{-1}(\Sigma)$. 由 $\overline{Q}=Q$, 得 $\overline{\Sigma}=\Sigma$. 又由 $f^k(Q)=Q$, 推得 $i(f(q))\in\Sigma$, $q\in Q$, 从而 $\overline{\phi(\mathbb{R}^1,\Sigma)}\subset\Omega$ 是不变集合，与 Ω 是极小集合矛盾.

自然会提出问题：能否把定理 2.1(Poincaré Bendixson) 推广到高维($n\geqslant 3$)动力系统?

1961 年，D'Heedene [16] 发表一个反例，说明不能作简单的推广. 以下介绍此反例.

2.2 D'Heedene 的反例

概括地说，D'Heedene 的例子是这样的一个三维动力系统：$\dot{x}=y$, $\dot{y}=z-x$, $\dot{z}=Z(x, y, z)$，其中$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$, $Z(x, y, z)$为某特意设计的光滑函数，此系统除了四个轨道外，其它轨道当$t\to\infty$时均趋向一曲面Σ（与二维环面T^2同胚），对Σ上每一点p来说，Σ包含过p的整条轨道$\Gamma(p)$，而$\Gamma(p)$在Σ处处稠密，是几乎周期的（但不是周期的）．这就显示了不能把平面动力系统的 Poincaré-Bendixson 定理向$n(\geqslant 3)$维动力系统作简单的推广．

以下分几部分讲述：甲．方程的建立；乙．在Σ以外的轨道性态；丙．Σ上的轨道．

【甲】 方程的建立

考虑三维动力系统

$$\begin{aligned}&\dot{x}=y,\\&\dot{y}=z-x,\\&\dot{z}=Z(x, y, z).\end{aligned}\tag{2.7}$$

其中$Z:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^1$将在下面给出．

为了便于在环面上讨论，作坐标变换$(x, y, z)\mapsto(\theta, \phi, \rho)$如下：

$$\begin{aligned}&\cos\theta=x/r,\ \sin\theta=-y/r,\\&\rho=\sqrt{(r-R)^2+z^2},\\&\cos\phi=(r-R)/\rho,\ \sin\phi=z/\rho,\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$, $0<R$为常数．于是，$\rho=a(a<R)$表示一个环面．我们用下列关系把环面嵌入$\mathbb{R}^3$中：

$$\begin{aligned}&x=(R+\rho\cos\phi)\cos\theta,\\&y=-(R+\rho\cos\phi)\sin\theta,\\&z=\rho\sin\phi,\end{aligned}$$

其中 $0\leqslant\phi<2\pi$, $0\leqslant\theta<2\pi$, $0<\rho<R$. 用 θ, ϕ, ρ 表示, 系统(2.7)变为

$$\dot{\theta}=1-\frac{\rho\cos\theta\sin\phi}{R+\rho\cos\phi}, \tag{2.9a}$$

$$\dot{\phi}=\frac{Z}{\rho}\cos\phi+\sin\theta\sin^2\phi, \tag{2.9b}$$

$$\dot{\rho}=(Z-\rho\sin\theta\cos\phi)\sin\phi. \tag{2.9c}$$

设 $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0\ll R$, $\delta\in\mathbb{R}^1$, $|\delta|\ll\varepsilon_0$; $g(\varepsilon)$ 为光滑函数

$g:[0, R]\to\mathbb{R}^1$,

$g(\varepsilon_0)=\delta$; $g(\varepsilon)=0$, $\forall\varepsilon\in[0, R]\setminus(\varepsilon_0-|\delta|, \varepsilon_0+|\delta|)$.

令 $S(\varepsilon)$ 为环面

$$S(\varepsilon):\rho=\varepsilon+g(\varepsilon)\sin^2\phi\sin\theta. \tag{2.10}$$

当 $\varepsilon=\varepsilon_0$ 时, 记 $\Sigma=S(\varepsilon_0)$, 即

$$\Sigma:\rho=\varepsilon_0+\delta\sin^2\phi\sin\theta.$$

本反例的要点是利用这套环面 (2.10), 适当设计函数 Z, 使当 $\varepsilon>\varepsilon_0$ 时, 除却三条轨道外, 系统 (2.9) 的轨道当 $t\to\infty$ 时均进入 $S(\varepsilon)$ 内; 当 $\varepsilon<\varepsilon_0$ 时, 除了一条轨道外, (2.9) 的其它轨道当 $t\to\infty$ 时均跑到 $S(\varepsilon)$ 之外; 这些轨道当 $t\to\infty$ 时, 均趋于 $S(\varepsilon_0)$. 在此, 常数 δ 之作用是把 $S(\varepsilon_0)$ 变形, 使其截面不是圆, 以避免 $\Sigma=S(\varepsilon_0)$ 上出现周期轨道.

在具体给出 Z 之前, 引入下列两个函数 F, $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^1$. 取 F 为满足下列条件的光滑函数:

$$F(x, y, z)\begin{cases}=0, & (x, y, z)\in\Sigma=S(\varepsilon_0),\\ <0, & (x, y, z)\in\Sigma \text{ 之内部},\\ >0, & (x, y, z)\in\Sigma \text{ 之外部}.\end{cases}$$

特别地, $F(x, y, z)=1$, 当 $r\leqslant R/2$. 取

$$G(x, y, z)=\begin{cases}g(\varepsilon), & (x, y, z)\in S(\varepsilon),\\ 0, & (x, y, z)\notin S(\varepsilon).\end{cases}$$

然后, 令

$$Z_s(x, y, z)=\frac{(\rho+2G\sin\theta\sin^2\phi)\sin\theta\cos\phi+G\dot{\theta}\sin\phi\cos\theta}{1-(2G/\rho)\cos^2\phi\sin\theta}, \tag{2.11}$$

其中 $\dot{\theta}$ 由 (2.9a) 给定. 当 $G=0$ 时, $Z_s=\left(\frac{R}{r}-1\right)y$. 特别, 当 $r=R/2$ 时, $Z_s=y$. 最后, 利用上述, 定义 Z:

$$Z(x, y, z)=\begin{cases} Z_s-zF, & \text{当}\quad r\geqslant R/2, \\ y-z, & \text{当}\quad r\leqslant R/2. \end{cases} \tag{2.12}$$

这样一来, 系统(2.7)完全定义了, 而且它满足 Lipschitz 条件.

【乙】 在曲面 Σ 以外的轨道

我们要证明在 Σ 以外之轨道, 除却四条外, 当 $t\to\infty$ 时均趋于 Σ. 为此目的, 用一套曲面充满 $\mathbb{R}^3$: 当 $r\geqslant R/2$ 时, 采用曲面 (2.10), 此时 $0<\varepsilon<\infty$; 在 $\varepsilon>R/2$ 时, 每个环面 $S(\varepsilon)$ 与 $r=R/2$ 这圆柱交于两个圆, 用锥面 $z^2=x^2+y^2+C$ (C 适当选取) 把这个 $S(\varepsilon)$ 向圆柱内部延展.

可以求出这曲面的外法向量为([注 1])

$$\boldsymbol{n}=\begin{cases} \boldsymbol{\rho}-\left(\frac{2G}{\rho}\sin\phi\cos\phi\sin\theta\right)\boldsymbol{\phi}-\left(\frac{G}{r}\sin^2\phi\cos\theta\right)\boldsymbol{\theta} \\ \qquad\qquad (r>R/2), \\ z\boldsymbol{k}-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j} \quad (r<R/2), \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\phi}$ 分别为 ρ, θ, ϕ 方向的单位坐标向量; $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 分别为 x, y, z 方向的单位坐标向量. 而沿系统(2.9)的轨道移动之点的速度向量是

$$\boldsymbol{v}=\begin{cases} \dot{\rho}\boldsymbol{\rho}+r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}+\rho\dot{\phi}\boldsymbol{\phi} & (r>R/2), \\ \dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k} & (r<R/2). \end{cases}$$

于是可算出下面的内积

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=\begin{cases} -\frac{z^2F}{\rho}\left(1-\frac{2G}{\rho}\sin\phi\cos^2\phi\sin\theta\right) & (r>R/2), \\ -z^2 & (r<R/2). \end{cases} \tag{2.13}$$

这表明：在 $\Sigma=S(\varepsilon_0)$ 以内之轨道（这时 $F<0,\ G=0\Rightarrow \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\geqslant 0$），当 $t\to\infty$ 时，由内至外地穿过这些环面.

在 Σ 上，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0$，故 Σ 为不变集合.

在 Σ 以外之轨道（$F>0,\ G=0\Rightarrow \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\leqslant 0$），当 $t\to\infty$ 时由外至内地穿过这些曲面，所以它们或者趋向 Σ，或者趋向奇点 $(0,\ 0,\ 0)$.

注意及圆 $r=R,\ z=0$ 是一条轨道，它是不稳定的极限环.

再注意及系统的奇点 $(0,\ 0,\ 0)$ 是不稳定的，仅有两条轨道在 $t\to\infty$ 时趋向它. 因为当 $r\leqslant R/2$ 时，(2.7) 是线性的，其特征多项式为 $P(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2+1$，$P(-1)=1$，$P(-2)=-3$，故有负实根 $\lambda_1\in(-2,\ -1)$；又因三根 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ 满足关系 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$，故 $\mathrm{Re}(\lambda_2)>0,\ \mathrm{Re}(\lambda_3)>0$.

一句话，系统(2.9)或(2.7)之轨道，除了四条外，当 $t\to\infty$ 时均趋向 $\Sigma=S(\varepsilon_0)$.

【丙】 Σ 上的轨道

将要证明 Σ 上的轨道都不是周期的，而是几乎周期的且在 Σ 上稠密.

注意及 $\Sigma=S(\varepsilon_0)$ 之方程为 $\rho=\varepsilon_0+\delta\sin^2\phi\sin\theta$，故仅用 θ 和 ϕ 两变量来描述 Σ 上的点，显得较方便. 由 (2.9a) 知，在 Σ 上 $\dot\theta>0$，可取 θ 为独立变量，转而考虑微分方程

$$\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}=\frac{\dot\phi}{\dot\theta}=\frac{\sin\theta+\dot\theta(\delta/\rho)\sin\phi\cos\phi\cos\theta}{\dot\theta(1-(2\delta/\rho)\cos^2\phi\sin\theta)}=f(\theta,\ \phi),\tag{2.14}$$

其中 $\rho(\theta,\ \phi)=\varepsilon_0+\delta\sin^2\phi\sin\theta$，而 $\dot\theta(\theta,\ \phi)$ 由(2.9a)给出.

对于(2.14)，有下列定理：

定理　如 Σ 上有一轨道是周期的，则 Σ 上一切轨道都是周期的. 如 Σ 上有一非周期轨道，则一切轨道皆非周期的. 如 Σ 上的轨道非周期的，则每一轨道都是几乎周期的而且在 Σ 稠密.

证明 此定理已在 Coddington 与 Levinson [4] 证明了(参考该书第 17 章之定理 17.3.2 和 17.4.2). 容易验证定理 17.4.2 的假设皆满足; 特别, 由于 $\partial f/\partial \phi$ 仅有有限个极值点, 故它是有界变差函数. ∎

按此定理, 我们只要能证明存在 δ 使得 (2.14) 有一个非周期解, 便达到目的. 证明这件事的大致步骤为:

引理甲 若选取 ε_0 足够小, 则存在区间 $[-\delta_0, \delta_0]$ 使得

$$\frac{\partial u_p(\delta)}{\partial \delta}>0, \ \forall \delta \in [-\delta_0, \delta_0], \ \forall p \in C,$$

其中 C 为 $\Sigma=S(\varepsilon_0)$ 上与 $\theta=0$, $0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$ 相对应的圆周, $u_p(\delta)=\phi(2\pi)-\phi(0)$, 这里 $\phi(\theta)$ 是方程 (2.14) 在 Σ 上过点 $p=(0, \phi(0))$ 的轨道的方程.

引理甲表明 $\Gamma(p)$, $p=(0, \phi(0))\in C$, 绕 z 轴转一周返回 C 时, ϕ 角差 $u_p(\delta)$ 是 δ 之单调增函数.

利用引理甲可证明引理乙.

引理乙 设 $p\in C$, 则 $\Gamma(p)$ 不是闭轨道, $\forall \delta\in[-\delta_0, \delta_0]\setminus \Lambda$, 其中 $\Lambda\subset[-\delta_0, \delta_0]$ 是一可列集.

于是任取一个这种 $\delta\in[-\delta_0, \delta_0]\setminus\Lambda$, 考虑相应的方程(2.14)及曲面 $\Sigma=S(\varepsilon_0): \rho=\varepsilon_0+\delta\sin^2\phi\sin\theta$, 是为所求.

以下分别证明引理甲和引理乙.

引理甲的证明 可以证明 $u_p(\delta)$ 能展开成幂级数

$$u_p(\delta)=\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}\alpha^i\beta^j, \tag{2.15}$$

其中 $\alpha=\delta/\varepsilon_0$, $\beta=\varepsilon_0/R$, 而且系数 $a_{10}>0$. 因为

$$\frac{\partial u_p(\delta)}{\partial \delta}=a_{10}+O(\beta),$$

从而引理得证. 现在证明 (2.15) 成立.

首先选取 β 足够小, 然后选取 α 足够小, 反复运用展开式

$(1-x)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$, 可把 (2.14) 右方展开为关于 α 和 β 的二重幂级数([注 2]):

$$\phi'(\theta)=\sin\theta+\alpha(2\cos^2\phi\sin^2\theta+\sin\phi\cos\phi\cos\theta)+\cdots. \tag{2.16}$$

因 $\phi'(\theta)$ 是 α, β 的解析函数, 故 $\phi(\theta)$ 亦然 (证明参见 Birkhoff[114], 或 Lefschetz[194]). 改写 $\phi(\theta)$, 令 $\phi(\theta)=c\cos\theta+e(\theta)$, 其中 $c=1+\phi(0)$, 利用 (2.16) 看出 $e'(\theta)$ 的展式中 $\alpha^0\beta^0$ 的系数为零,从而 $e(\theta)$ 的展式中此项系数亦为零. 把这改写后的表达式代入 (2.16), 并利用各式各样的三角恒等式以及展开 $\sin e(\theta)$ 与 $\cos e(\theta)$ 为级数等, 可得

$$\begin{aligned}\phi'(\theta)=\sin\theta+\frac{\alpha}{2}\{&[1+\cos 2c\cos(2\cos\theta)+\sin 2c\sin(2\cos\theta)]\\&\times(1-\cos 2\theta)+[\sin 2c\cos(2\cos\theta)\\&-\cos 2c\sin(2\cos\theta)]\cos\theta\}+\cdots.\end{aligned} \tag{2.17}$$

因为 $u_p(\delta)=\int_0^{2\pi}\phi'(\theta)d\theta$, 把 (2.17) 式中 α 的系数积分(从 0 到 2π), 即得 $a_{10}=\pi$ (可用 Watson[115, pp. 17～19 的公式]).

∎

引理乙的证明 首先引入记号 $N(\delta)$, 若 $\delta_1\in[-\delta_0,\delta_0]$, 在 $S(\varepsilon_0)$: $\rho=\varepsilon_0+\delta_1\sin^2\phi\sin\theta$ 上过 $p\in C$ 的轨道 $\Gamma(p)$ 为闭轨道, 设它绕 z 轴 $N(\delta_1)$ 匝, 故在一周期内, θ 角增加 $2\pi N(\delta_1)$. 若对某 δ, $\Gamma(p)$ 非周期, 则令 $N(\delta)=\infty$.

在 $N(\delta_1)$ 为有限的情形, 任 $M>0$, 则存在 δ_1 的某邻域 $\mathscr{D}$, 使得 $\delta\in\mathscr{D}\setminus\{\delta_1\}\Rightarrow N(\delta)>M$. 事实上, 考虑 $\Gamma(p)$ 依次与 C 相交的点列 $p=p_0, p_1, p_2, \cdots, p_{N(\delta_1)}=p$, 由引理甲推出, 当 δ 稍稍增加时, 这些点均向较大的 ϕ 值的位置移动. 由于这些点彼此间以有限的距离相分隔, 所以可令 δ 增加少许而使 $N(\delta)>M$. 类似地, 若 δ 自 δ_1 减少微量, 亦有相同的结果.

其次，固定 $N>0$，令 $D_N=\{\delta\in[-\delta_0, \delta_0]\mid N(\delta)<N\}$。由上述知，$\forall\delta\in D_N$，存在此 δ 的某个去心邻域 $U_\delta=(\delta-\eta, \delta+\eta)\setminus\{\delta\}$，使对应之 $N(\delta)>N$。由于 $(-\delta_0, \delta_0)$ 是有限区间，对每个 $m=1, 2, 3, \cdots$ 而言，长度大于 $1/m$ 的这种去心邻域只有有限个。所以这种邻域只有可列个。注意及 $\delta\in D_N$ 与这种邻域成一一对应，故 D_N 为可列集。

令 $D=\bigcup_{N=1}^{\infty} D_N$，故 D 亦是可列集，从而 $(-\delta_0, \delta_0)\setminus D$ 为不可列集，而且 $\forall\delta\in(-\delta_0, \delta_0)\setminus D$，相应之 $N(\delta)=\infty$，即 $\Gamma(p)$ 非周期。引理乙证完。于是 Σ 上的轨道的性态清楚了。 ∎

[注 1] 计算外法向量 $\boldsymbol{n}$ 如下：

在 (ρ, ϕ, θ) 坐标中，环面方程为 $S(\varepsilon): \rho=\varepsilon+g(\varepsilon)\sin^2\phi\sin\theta$，令

$$Q(\rho, \phi, \theta)=\rho-\varepsilon-g(\varepsilon)\sin^2\phi\sin\theta.$$

当 $r>R/2$，有

$$\rho=\rho(x, y, z)=\sqrt{(r-R)^2+z^2},$$

$$\phi=\phi(x, y, z)=\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{r-R}\right),$$

$$\theta=\theta(x, y, z)=\operatorname{arctg}\left(-\frac{y}{x}\right).$$

所以，环面方程可表为

$$H(x, y, z)=Q[\rho(x, y, z), \phi(x, y, z), \theta(x, y, z)]=0.$$

这曲面的外法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{\partial H}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial H}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial H}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

而 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}$ 之间有关系

$$\boldsymbol{i}=\frac{\partial\rho}{\partial x}\boldsymbol{\rho}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\rho\boldsymbol{\phi}+\frac{\partial\theta}{\partial x}r\boldsymbol{\theta},$$

$$\boldsymbol{j}=\frac{\partial\rho}{\partial y}\boldsymbol{\rho}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\rho\boldsymbol{\phi}+\frac{\partial\theta}{\partial y}r\boldsymbol{\theta},$$

$$\boldsymbol{k}=\frac{\partial\rho}{\partial z}\boldsymbol{\rho}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\rho\boldsymbol{\phi}+\frac{\partial\theta}{\partial z}r\boldsymbol{\theta}.$$

另外，我们有

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\cos\phi\cos\theta, \quad \frac{\partial\rho}{\partial y}=-\cos\phi\sin\theta, \quad \frac{\partial\rho}{\partial z}=\sin\phi,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{\sin\phi\cos\theta}{\rho}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\sin\phi\sin\theta}{\rho}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\cos\phi}{\rho},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{-\sin\theta}{r},\quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{-\cos\theta}{r},\quad \frac{\partial\theta}{\partial z}=0.$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial x}\quad 2g(\varepsilon)\sin\phi\cos\phi\sin\theta\,\frac{\partial\phi}{\partial x}-g(\varepsilon)\sin^2\phi\cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{\partial\rho}{\partial y}-2g(\varepsilon)\sin\phi\cos\phi\sin\theta\,\frac{\partial\phi}{\partial y}-g(\varepsilon)\sin^2\phi\cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial H}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial z}-2g(\varepsilon)\sin\phi\cos\phi\sin\theta\,\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

所以，环面的

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\rho}-\left(\frac{2G}{\rho}\sin\phi\cos\phi\sin\theta\right)\boldsymbol{\phi}-\left(\frac{G}{r}\sin^2\phi\cos\theta\right)\boldsymbol{\theta},\quad r>R/2.$$

至于锥面 $z^2=x^2+y^2+C$，则有

$$\boldsymbol{n}=-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

[注 2] 把 $\dot{\theta}=1-\dfrac{(\varepsilon_0+\delta\sin^2\phi\sin\theta)\cos\theta\sin\phi}{R+(\varepsilon_0+\delta\sin^2\phi\sin\theta)\cos\phi}$，$\rho=\varepsilon_0+\delta\sin^2\phi\sin\theta$ 代入(2.14)，即

$$\phi'(\theta)=\frac{\sin\theta+\dot{\theta}(\delta/\rho)\sin\phi\cos\phi\cos\theta}{\dot{\theta}(1-(2\delta/\rho)\cos^2\phi\sin\theta)},$$

可得

$$\phi'(\theta)=\frac{\sin\theta}{\left[1-\beta\,\dfrac{(1+\alpha\sin^2\phi\sin\theta)\cos\theta\sin\phi}{1+(\beta+\alpha\beta\sin^2\phi\sin\theta)\cos\phi}\right]\left[1-\alpha\,\dfrac{2\cos^2\phi\sin\theta}{1+\alpha\sin^2\phi\sin\theta}\right]}$$

$$+\frac{\dfrac{\alpha}{1+\alpha\sin^2\phi\sin\theta}\sin\phi\cos\phi\cos\theta}{1-\dfrac{2\alpha\cos^2\phi\sin\theta}{1+\alpha\sin^2\phi\sin\theta}},$$

其中 $\alpha=\delta/\varepsilon_0$，$\beta=\varepsilon_0/R$，$0<\alpha$，$\beta\ll1$. 反复运用

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots,$$

可得

$$\phi'(\theta)=\sin\theta+\alpha(2\cos^2\phi\sin^2\theta+\sin\phi\cos\phi\cos\theta)+O(\alpha^2)$$
$$+O(\alpha\beta)+O(\beta),$$

是为(2.16). 于是，

$$u_\rho(\delta)=\int_0^{2\pi}\phi'(\theta)d\theta$$
$$=\alpha\int_0^{2\pi}(2\cos^2\phi\sin^2\theta+\sin\phi\cos\phi\cos\theta)d\theta$$
$$+O(\alpha^2)+O(\alpha\beta)+O(\beta).$$

从而

$$\frac{\partial u_v(\delta)}{\partial \delta}=\frac{\partial u_v(\delta)}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \delta}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial u_p(\alpha)}{\partial \alpha}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\int_0^{2\pi}(2\cos^2\phi\sin^2\theta+\sin\phi\cos\phi\cos\theta)d\theta+O(\alpha)+O(\beta)\right]$$

所以，当

$$\alpha\ll 1,\ \beta\ll 1,$$

$$\operatorname{sgn}\left[\frac{\partial u_v(\delta)}{\partial \delta}\right]=\operatorname{sgn}\left[\int_0^{2\pi}(2\cos^2\phi\sin^2\theta+\sin\phi\cos\phi\cos\theta)d\theta\right].$$

把

$$\phi(\theta)=c-\cos\theta+e(\theta),\ c=1+\phi(0),$$

代入 $J=(2\cos^2\phi\sin^2\theta+\sin\phi\cos\phi\cos\theta)$，把 $\cos 2(c-\cos\theta+e(\theta))$，$\sin 2(c-\cos\theta+e(\theta))$ 展开为 Taylor 级数，并舍去 $O(\alpha)$ 各项，可得

$$J=\frac{1}{2}\{[1+\cos 2c\cos(2\cos\theta)+\sin 2c\sin(2\cos\theta)](1-\cos 2\theta)$$
$$+[\sin 2c\cos(2\cos\theta)-\cos 2c\sin(2\cos\theta)]\cos\theta\}.$$

$$\int_0^{2\pi}J\,d\theta=\frac{\pi}{2}>0.$$

[注 3] 联系到 D'Heedene 的例，可以想象空间动力系统的轨道的几何结构可以是很复杂的，例如，空间的周期轨道可以是打结的，参见下列文章：Булгаков[116]，Parris[117]，Розот[118].

Parris 的例如下：

$$x'=-my+nxz,$$
$$y'=mx+nyz,$$
$$z'=\frac{n}{2}(1+z^2-x^2-y^2),\ mn\neq 0,$$

其中 m，n 为互质的整数，存在打结的周期轨道.

Розет[118]对三维系统

$$\frac{dx}{dt}=X(x,\ y,\ z),\ \frac{dy}{dt}=Y(x,\ y,\ z),\ \frac{dz}{dt}=Z(x,\ y,\ z)$$

给出存在打结的轨道的充分条件（该文的定理 1），推广了 Булгаков[116]，Parris [117]的工作. 此外，还对同一系统给出至少存在一条极限环以及至少存在两条极限环的充分条件（该文的定理 2）. 其处理方法是引入柱坐标，把系统化为下形：

$$\frac{dr}{dt}=R_1(r,\ z)+\mu R_2(r,\ z,\ \varphi),$$
$$\frac{dz}{dt}=Z_1(r,\ z)+\mu Z_2(r,\ z,\ \varphi),$$
$$\frac{d\varphi}{dt}=\Phi(r,\ z,\ \varphi),$$

其中 μ 为参数，$0\leq|\mu|\ll 1$. 例如，上述 Parris 方程可化为：

$$\frac{dr}{dt}=nrz,\quad \frac{dz}{dt}=\frac{1}{2}n(1+z^2-r^2),\quad \frac{d\varphi}{dt}=m.$$

Hirsch[119]研究了 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^1 微分系统

$$dx_i/dt=F_i(x_1,\cdots,x_n)=F_i(x),\quad i=1,\cdots,n.$$

如果 $\partial F_i/\partial x_j\leqslant 0,\ j\neq i$，则称此系统为竞争的；如果 $\partial F_i/\partial x_j\geqslant 0, j\neq i$，则称系统为合作的．当 $n=3$，有下列结果([119，定理 C])：

设 L 是竞争的系统(或合作的系统)的一极限集(不含奇点)，则有：

(a) L 或是一条闭轨道，或是一族闭轨道所构成的柱面．

(b) 如系统是合作的，且 L 是 ω 极限集，则 L 是一闭轨道．

(c) 如一切闭轨道都是双曲型的，则 L 是一条闭轨道．

此外，[119]还证明了竞争的(或合作的)系统($n=3$)的闭轨道不打结，且互相不连环．

张芷芬[136]构造了一个以 Antoine 项链(参考 Hocking & Young[137]，p. 177)为极小集合的 $\mathbb{R}^3$ 上拓扑动力系统．由此可见，$\mathbb{R}^n$ 中动力系统的极小集合可以是很复杂的．$\mathbb{R}^3$情形，还可参考 Schweitzer[24]的反例．

2.3 Smith 定理

对于二维动力系统，下面是 Poincaré-Bendixson 定理的一种常见形式：

定理 2.3(Poincaré-Bendixson)　二维 C^1 动力系统的非空、紧致极限集，如不含奇点则是一周期轨道．

证明　参见 Hirsch 与 Smale[7, pp. 248～249]．　∎

1963，Schwartz[14]推广此定理，得到下列

定理 2.4 (Poincaré-Bendixson-Schwartz)　设 M^2 是二维 C^2 微分流形(紧致、连通、可定向)，在其上给定一个 C^2 动力系统 ϕ．若 M^2 不是此动力系统的极小集合，ω 极限点集 Ω_p 不含奇点，则 $\Omega_p\cong S^1$ 而且 $\phi(t,p)$盘旋趋向 Ω_p．

证明　参见[14, pp. 457～458]，是定理 2.2 的推论．　∎

1979 年，Smith[17] 在附加若干条件下，把定理 2.3 推广到一类高维动力系统 $f(D)x+b\Phi(g(D)x)=0$；1980，同一作者 [18]

发展了 [17] 的方法，把定理 2.3 推广到较为广泛的动力系统 $Dx=f(x)$.

考虑自治微分方程

$$f(D)x+b\Phi(g(D)x)=0, \tag{2.18}$$

其中 $D=d/dt$; $f(D)=f_0+f_1D+\cdots+f_nD^n$, $f_0, f_1, \cdots, f_n\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 而且 $\det f_n\neq 0$; $g(D)=g_0+g_1D+\cdots+g_{n-1}D^{n-1}$, $g_0, g_1, \cdots, g_{n-1}\in\mathbb{R}^{s\times m}$; $x(t)\in\mathbb{R}^{m\times 1}$, $t\in\mathbb{R}^1$; $b\in\mathbb{R}^{m\times r}$; $\Phi:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^r$, $\Phi\in C^1(\mathbb{R}^s)$. 方程 (2.18)等价于

$$DX=AX+B\Phi(GX), \tag{2.19}$$

其中 $X=\mathrm{col}(x, Dx, \cdots, D^{n-1}x)$, $B=\mathrm{col}(0, \cdots, 0, -f_n^{-1}b)$, $G=(g_0, g_1, \cdots, g_{n-1})$ 而 A 是多项式 $f_n^{-1}f(D)$ 的分块同伴阵 (companion matrix):

$$A=\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & I \\ -f_n^{-1}f_0 & -f_n^{-1}f_1 & -f_n^{-1}f_2 & -f_n^{-1}f_3 & \cdots & -f_n^{-1}f_{n-1} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{mn\times mn},$$

其中 $I\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 为幺阵.

定理 2.5(Smith[17]) 假设方程(2.19)满足:

(i) $\exists\lambda>0$ 及闭椭球 $\mathscr{B}(C, L_1, L_2)\subset\mathbb{C}^{r\times s}$ 和凸集 $S\subset\mathbb{R}^s$ 使得

$$\mathscr{E}_\lambda^2\supset\mathscr{B}(C, L_1, L_2)\supset\operatorname*{Range}_{y\in S}\partial\Phi(y)/\partial y;$$

(ii) (2.19)有一有界半轨道 Γ^+ (即: $\Gamma^+=\{\Gamma(p)\,|\,t\in[t_0, \infty)\}$)使得

$$GX\in S, \ \forall X\in\Gamma^+;$$

(iii) Γ^+ 的 ω 极限点集 $\Omega(\Gamma^+)$ 不含(2.19)的奇点;

则 $\Omega(\Gamma^+)$是(2.19)的一条周期轨道.

上述条件中之 $\mathscr{E}_\lambda^2$, $\mathscr{B}(C, L_1, L_2)$ 的定义如下：对于 $\lambda>0$, $\mathscr{E}_\lambda^2=\{K\in\mathbb{C}^{r\times s}|\det[f(z)+bKg(z)]=0$ 有两根满足 $\mathrm{Re}(z)>-\lambda$, 而 $(mn-2)$ 个根满足 $\mathrm{Re}(z)<-\lambda\}$, 显然，当 $b=-I$, $g(z)=I$, $f(z)=Iz$, $\det[f(z)+bKg(z)]=0$ 就是 K 的特征方程.

对于给定的 $C\in\mathbb{C}^{r\times s}$, 非奇异的 $L_1\in\mathbb{C}^{r\times r}$ 及 $L_2\in\mathbb{C}^{s\times s}$, 定义

$$\mathscr{B}(C, L_1, L_2)=\{K\in\mathbb{C}^{r\times s}|\text{谱模}|L_1(K-C)L_2|\leqslant 1\}^{[注]}.$$

特别，当 $L_1=\rho L_2=I$, $\mathscr{B}(C, L_1, L_2)$ 就是赋范空间 $\mathbb{C}^{r\times s}$ 中以 C 为中心，ρ 为半径的闭球.

定理 2.5 是下列平面动力系统的 Poincaré–Bendixson 定理的推广：

$$\begin{aligned} D\xi&=p(\xi, \eta),\\ D\eta&=q(\xi, \eta),\end{aligned} \tag{2.20}$$

其中实函数 $p(\xi, \eta)$, $q(\xi, \eta)\in C^1(\mathbb{R}^2)$. 事实上，(2.20) 是形如(2.18)的方程，只要取 $x=\mathrm{col}(\xi, \eta)$, $\Phi(x)=\mathrm{col}(p, q)$, $f(D)=ID$, $b=-I$, $g(D)=I$, 其中 I 表示幺阵. (2.20) 的有界半轨道 Γ^+ 必属于 (ξ, η) 平面内某闭圆域 S. 由于 Jacobi 阵 $\partial\Phi/\partial x$ 是连续的，故在 S 上有界，从而属于 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 空间内以零阵为中心，以充分大的 ρ 为半径的闭球 $\mathscr{B}$. 对于 $\mathscr{B}$ 内任一阵 K, 其特征值皆有界，故它们的实部都大于某负常数 $-\lambda$, 于是 $\mathscr{E}_\lambda^2\supset\mathscr{B}$, 所以方程(2.20)满足定理 2.5 的假设(i)和(ii). 若 $\Omega(\Gamma^+)$ 不含 (2.20) 的奇点，则由定理 2.5 推出 $\Omega(\Gamma^+)$是系统(2.20) 的一条闭轨道. 这就表明古典的 Poincaré-Bendixson 定理 2.3 是定理 2.5 的特殊情形.

在证明定理 2.5 之前，再介绍 Smith 的另一个定理[18].

[注]　矩阵 A 的谱模 $|A|$(spectral norm) 定义如下：

$$|A|\triangleq\max_i\sqrt{\lambda_i(A^*A)},$$

其中 $\lambda_i(A^*A)$ 是 A^*A 的特征根. 当 $A\in\mathbb{C}^{1\times n}$ 或 $A\in\mathbb{C}^{n\times 1}$ 时，则 $|A|$ 为 A 之欧氏模.

考虑 n 维动力系统

$$Dx=f(x), \tag{2.21}$$

其中 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $f\in C(\mathbb{R}^n)$, $D=d/dt$. 1980 年, Smith [18] 利用 [17] 的基本思想把定理 2.3 推广到系统(2.21).

定理 2.6(Smith) 假设系统(2.21)满足条件:

(i) $\exists S\subset\mathbb{R}^n$, $\bar{S}=S$, f 在 S 内局部满足 Lipschitz 条件;

(ii) $\exists\lambda>0$, $\varepsilon>0$ 及二次型 $V(x)$, 使得

(a) 系统(2.21)的每对解 $x_1(t)$, $x_2(t)$, 对于使 $x_1(t)$, $x_2(t)\in S$ 的一切 t, 均有

$$DV(x_1(t)-x_2(t))+2\lambda V(x_1(t)-x_2(t))$$
$$\leqslant-\varepsilon|x_1(t)-x_2(t)|^2;$$

(b) $V(x)=x^*Px$, 其中 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $P^T=P$, 且有两个负特征根, $(n-2)$ 个正特征根;

(iii) 系统(2.21)有一有界半轨道 $\Gamma^+\subset S$.

如 $\Omega(\Gamma^+)$ 不含(2.21)的奇点, 则 $\Omega(\Gamma^+)$ 是 (2.21) 的一条周期轨道.

可以看出,定理 2.6 以定理 2.3 为特殊情形. 事实上,给定系统(2.21)的一条有界半轨道 $\Gamma^+\subset S$, 令 S_0 为 Γ^+ 的闭包. 因 $f(x)$ 满足假设(i), 故存在常数 ρ, 使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\rho|x-y|,\ \forall x,\ y\in S_0. \tag{2.22}$$

余下仅需找到满足 (ii)(当 $n=2$) 的二次型 $V(x)$. 为此目的, 取 $V(x)=-\frac{1}{2}(\lambda-\rho)^{-1}|x|^2$, 其中 ρ 是 (2.22) 式的常数. 若常数 $\lambda>\rho$, 则因 $n=2$ 而知 $P=-\frac{1}{2}(\lambda-\rho)^{-1}I$ 满足条件 (ii)(b). 若 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 是(2.21)的解, 由(2.22)得

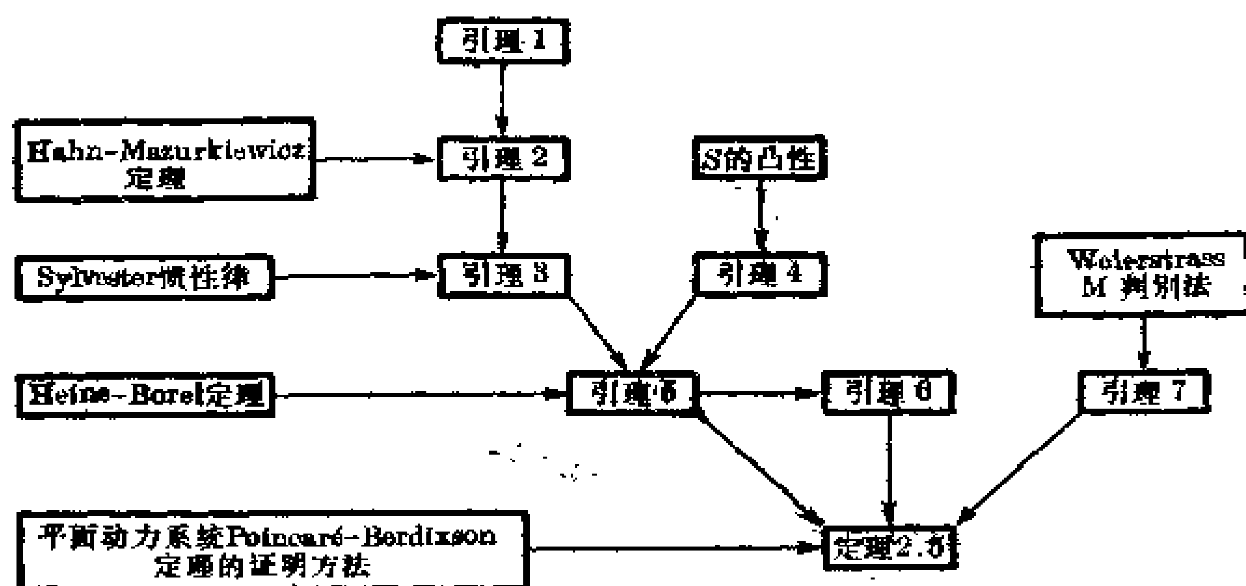
$$\begin{aligned}&(\lambda-\rho)(D+2\lambda)V(x_1-x_2)\\&=(x_1-x_2)^*[f(x_2)-f(x_1)-\lambda(x_1-x_2)]\\&\leqslant(\rho-\lambda)|x_1-x_2|^2\end{aligned}$$

对使 $x_1(t)$, $x_2(t)\in S_0$ 的一切 t 成立. 于是, 把定理 2.6 中的 S, $V(x)$ 换为 S_0, $-\frac{1}{2}(\lambda-\rho)^{-1}|x|^2$, 则该定理的全部假设成立; 所以由定理 2.6 立刻得出定理 2.3.

以下讲述定理 2.5 的证明.

定理 2.5 的证明较长, 现分部进行, 先证七条引理, 奠定基础; 而证明定理 2.5 的方法, 是利用线性映射 $\pi:\mathbb{R}^{mn}\to\mathbb{R}^2$ 把 $DX=AX+B\Phi(GX)$ 的轨道映射到 $\mathbb{R}^2$ 上去, 然后借鉴于二维动力系统 Poincaré–Bendixson 定理的证法 (参考 Hirsch 与 Smale [7, pp. 248~249]).

现把定理 2.5 的证明主要线索勾画如下:



引理 1　A, P 为方阵, $P^*=P$, A^*P+PA 负定 ⇒ ① A 与 $-P$ 的特征值 $z\neq\pm i\sigma$; ② 在半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$, A, $-P$ 的特征值数目相同.

证明　考虑一族方阵 $A_\theta=(1-\theta)A-\theta P$, $\theta\in[0, 1]$, 显然, $A_0=A$, $A_1=-P$.

可以证明 A_θ, $\forall\theta\in[0, 1]$, 的特征值 z 皆满足 $z\neq\pm i\sigma$. 事实上, $Pw=0\Rightarrow w^*(A^*P+PA)w=0\Rightarrow w=0$, 故 $\det P\neq0$, P^2 正定. $A_\theta^*P+PA_\theta=(1-\theta)(A^*P+PA)-2\theta P^2$ 负定. 若 $A_\theta v=zv$,

对某 $v\neq 0$ 成立，则

$$(2\,\mathrm{Re}(z))v^*Pv=(\bar{z}+z)v^*Pv=v^*(A_\theta^*P+PA_\theta)v<0,$$

从而 A_θ, $\forall\theta\in[0,1]$, 的一切特征值 z 满足 $z\neq\pm i\sigma$. 分别取 A_0, A_1, 即为 ①.

另方面，由 A_θ 之定义知，A_θ 之特征值连续依赖于 θ. 它们不能越过直线 $\mathrm{Re}(z)=0$, 故 A_θ 在半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$ 内的特征值数目，对 $\theta\in[0,1]$, 是一常数. 所以立得 ②. ∎

考虑微分方程

$$DX=[A+BM(t,X)G]X, \tag{2.23}$$

其中 A, B, G 是方程(2.19)中的常阵，$M(t,X)$ 是把 $E\times\mathbb{R}^{mn}$ 映到 $\mathbb{R}^{r\times s}$ 的连续映射，$E=[t_0,\infty)$. (2.23)与下述方程等价：

$$f(D)x+bM[t,x]g(D)x=0, \tag{2.24}$$

其中 $M[t,x]$ 是用 $X=\mathrm{col}(x, Dx, \cdots, D^{n-1}x)$ 代入 $M(t,X)$ 所得. 特别，考虑满足下列条件的(2.23)和(2.24)：

$$\mathscr{B}(C,L_1,L_2)\supset\underset{E\times\mathbb{R}^n}{\mathrm{Range}}\,M(t,X). \tag{2.25}$$

引理 2 $\forall\mathscr{B}(C,L_1,L_2)\subset\mathscr{E}_0^j$, $\exists\varepsilon_0>0$ 及非奇异、对称常阵 $P_0\in\mathbb{R}^{mn\times mn}$ (P_0 恰有 j 个负特征值)，使得二次型 $V_0(X)=X^*P_0X$ 满足

$$DV_0(X(t))\leqslant-\varepsilon_0|X(t)|^2,\ t\in E=[t_0,\infty),$$

其中 $X(t)$ 是任一个满足条件(2.25)的方程(2.23)的解.

证明 设 $M_1:\mathbb{R}^1\to\mathbb{C}^{r\times s}$ 连续且满足 $\underset{t\in\mathbb{R}^1}{\mathrm{Range}}\,M_1(t)=\mathscr{B}(C,L_1,L_2)$. 这种映射的存在性，由 Hahn-Mazurkiewicz 定理保证. 该定理指出：设 $\mathscr{S}$ 为度量空间，局部连通、连通，有一紧致集 $\mathscr{T}\subset\mathscr{S}$, 则存在连续映射 $h:[0,1]\to\mathscr{T}$, 使得 $\underset{t\in[0,1]}{\mathrm{Range}}\,h(t)=\mathscr{T}$. (证明参见 Newman[120, p. 89]).

令 $\mathscr{H}=\mathscr{E}_0^0$, $\mathscr{A}=\bigcup\limits_{j=1}^{mn}\mathscr{E}_0^j$, 有 $\mathscr{B}(C,L_1,L_2)\subset\mathscr{E}_0^j\Rightarrow\mathscr{B}(C,L_1,$

$L_2)\subset\mathscr{H}$ 或 $\mathscr{B}(C,\ L_1,\ L_2)\subset\mathscr{A}$. 我们运用 Smith[19, 定理 3] 的一个定理[注]证实存在二次型 $V_0(X)=X^*P_0X$ 满足本引理的结论.

事实上, 在 (2.23) 中取 $M(t,\ X)$ 为 $M_1(t)$, 由 Smith 定理 [19, 定理 3], 存在 Hermite 型 $V(X)=X^*PX$ 及常数 $\varepsilon_0>0$, 使得对于一切满足方程 (2.23) [其中 $M(t,\ X)\equiv M_1(t)$] 的 $X(t)$, 有

$$DV(X(t))\leqslant-\varepsilon_0|X(t)|^2.$$

于是, 取 $V_0(X)=X^*P_0X$, 其中 $P_0=\mathrm{Re}P$, 便有: 对一切满足(2.23)和(2.25)的 $X(t)$, 成立

$$DV_0(X(t))\leqslant-\varepsilon_0|X(t)|^2,\ \forall t\in[t_0,\ \infty).$$

以下运用引理 1 来证明此断言.

考虑 $X^*[(A+BM_1G)^*P+P(A+BM_1G)]X$, 利用关系式 $DX=(A+BM_1G)X$, $(DX)^*=X^*(A+BM_1G)^*$ 可得

$$\begin{aligned}X^*[&(A+BM_1G)^*P+P(A+BM_1G)]X\\&=(DX)^*PX+X^*P(DX)=D(X^*PX)\\&\leqslant-\varepsilon_0X^*X,\ \forall X\in\mathbb{C}^{mn},\ \forall t\in\mathbb{R}^1.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$Hermite 阵 $X^*[\varepsilon_0I+(A+BM_1G)^*P+P(A+BM_1G)]X\leqslant0$, $\forall X\in\mathbb{C}^{mn}, \forall t\in\mathbb{R}^1$. 因 $\operatorname*{Range}_{t\in\mathbb{R}^1}M_1(t)=\mathscr{B}(C,\ L_1,\ L_2)$, 故 $\forall K\in\mathscr{B}(C,\ L_1,\ L_2)$, $\varepsilon_0I+(A+BKG)^*P+P(A+BKG)\leqslant0$, 取此阵的实部, 有

$$\varepsilon_0I+(A+BKG)^*P_0+P_0(A+BKG)\leqslant0,$$
$$\forall K\in\mathbb{R}^{r\times s}\cap\mathscr{B}(C,\ L_1,\ L_2),$$

[注] Smith[19, 定理 3]定理:

考虑方程 $DX=[A+BM_1(t)G]X$, 设存在闭椭球 $\mathscr{B}(C,\ L_1,\ L_2)$, 使得

$$\operatorname*{Range}_{t\in[t_0,\infty)}M_1(t)\subset\mathscr{B}(C,\ L_1,\ L_2),$$

则存在 Hermite 型 $V(X)=X^*PX$ 及常数 $\varepsilon_0>0$, 使得对于一切满足 (2.23) [其中取 $M(t,\ X)$ 为 $M_1(t)$] 的 $X(t)$, 都有

$$DV(X(t))\leqslant-\varepsilon_0|X(t)|^2.$$

其中 $P_0=\mathrm{Re}P$ 是实对称阵. 换言之, $(A+BKG)^*P_0+P_0(A+BKG)$ 为负定, $\forall K\in\mathbb{R}^{r\times s}\cap\mathscr{B}(C, L_1, L_2)$.

另方面, 注意及

$$\det[zI-(A+BKG)]=\det f_n^{-1}[f(z)+bKg(z)],$$

故 $K\in\mathscr{E}_\lambda^j\Leftrightarrow A+BKG$ 有 j 个特征值 z 满足 $\mathrm{Re}(z)>-\lambda$, $mn-j$ 个特征值 z 满足 $\mathrm{Re}(z)<-\lambda$. 连同 $\mathscr{B}(C, L_1, L_2)\subset\mathscr{E}_0^j$, 可得: 上述的 $A+BKG$ 在半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$ 内恰有 j 个特征值.

于是运用引理 1, 可得:

$-P_0$ 在半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$ 恰有 j 个特征值, 从而 P_0 恰有 j 个负特征值; $\det P_0\neq 0$.

只要把满足条件 $\mathscr{B}(C, L_1, L_2)\supset\underset{E\times\mathbb{R}^{mn}}{\mathrm{Range}}\,M(t,X)$ 的 $M(t,X)$ 代入上述 K 的位置, 有

$$\begin{aligned}DV_0(X)&=X^*[(A+BMG)^*P_0+P_0(A+BMG)]X\\&\leqslant-\varepsilon_0|X|^2,\end{aligned}$$

$\forall t\in E$, $\forall X(t)$ 满足 (2.23) 及 (2.25), 其中 $V_0(X)=X^*P_0X$.

∎

引理 3 $\forall\mathscr{B}(C, L_1, L_2)\subset\mathscr{E}_\lambda^j$, $\exists\varepsilon>0, \varkappa>0$ 以及 $P\in\mathbb{R}^{mn\times mn}$, $P^*=P$, P 恰有 j 个负特征值, 使得二次型 $V(X)=X^*PX$ 满足:

$$D[e^{2\lambda t}V(X(t))]\leqslant-\varepsilon e^{2\lambda t}|X(t)|^2,\ \forall t\in[t_0, \infty),\tag{2.26}$$

$$D[e^{2\lambda t}\varkappa V(X(t))+e^{2\lambda t}\varepsilon|X(t)|^2]\leqslant 0,\tag{2.27}$$

$\forall X(t)$ 满足 (2.23) 及 (2.25).

证明 主要利用下列两点:

(甲) 若 $u=e^{\lambda t}x$, 则 $D^\nu u=e^{\lambda t}(D+\lambda)^\nu x$, $\forall$ 整数 $\nu\geqslant 0$. 从而有 $U=e^{\lambda t}\Lambda X$, 其中 $U=\mathrm{col}(u, Du, \cdots, D^{n-1}u)$, $X=\mathrm{col}(x, Dx, \cdots, D^{n-1}x)$ 及

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda^{n-1} & C_1^{n-1}\lambda^{n-2} & C_2^{n-1}\lambda^{n-3} & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

（乙）使用引理 2.

现来陈述本引理的证明.

把 $x=e^{-\lambda t}u$ 代入方程(2.24)，利用关系式 $D^\nu x=e^{-\lambda t}(D-\lambda)^\nu u$，得

$$f(D-\lambda)u+b\mathfrak{M}[t,\ u]g(D-\lambda)u=0,\qquad(2.28)$$

其中 $\mathfrak{M}[t,\ u]=M[t,\ e^{-\lambda t}u]$；$(2.25)\Rightarrow \mathrm{Range}\,\mathfrak{M}[t,\ u]\subset\mathscr{B}(C,\ L_1,\ L_2)$.

令

$$\mathfrak{E}_\lambda^j=\{K\in\mathbb{C}^{r\times s}|\det[f(z-\lambda)+bKg(z-\lambda)]=0\text{ 有 } j \text{ 个根 } z$$
$$\text{满足 }\mathrm{Re}(z)>-\lambda,\ mn-j\text{ 个根 } z \text{ 满足 }\mathrm{Re}(z)<-\lambda\}.$$

于是，$\mathfrak{E}_0^j=\mathscr{E}_\lambda^j$，从而 $\mathfrak{E}_0^j\supset\mathscr{B}(C,\ L_1,\ L_2)$. 故可对方程(2.28)应用引理 2：$\exists\varepsilon_0>0$ 及二次型 $V_0(X)=X^*P_0X$，使得 $DV_0(U(t))\leqslant-\varepsilon_0|U(t)|^2$，$\forall u(t)$ 满足(2.28). 由此及(甲)推出

$$D[e^{2\lambda t}V_0(\Lambda X)]=DV_0(U(t))$$
$$\leqslant-\varepsilon_0e^{2\lambda t}|\Lambda X|^2\leqslant-\varepsilon e^{2\lambda t}|X|^2,$$

$\forall t\in E$，$\forall X(t)$ 满足 (2.23)，这里 $\varepsilon=\varepsilon_0|\Lambda^{-1}|^{-2}$. 因此，对于 $V(X)=V_0(\Lambda X)=X^*(\Lambda^*P_0\Lambda)X$，(2.26)成立. 此时，取 $P=\Lambda^*P_0\Lambda$，由引理 2 知，P_0 恰有 j 个负特征值，所以由惯性律推知 P 亦具此性质.

在此基础上，推导 (2.27). $(2.25)\Rightarrow|M(t,\ X)|$ 有界，再利用(2.23)，可得

$$D[e^{2\lambda t}|X(t)|^2]=e^{2\lambda t}X^*[2\lambda I+(A+BMG)^T+(A+BMG)]X$$
$$\leqslant\kappa e^{2\lambda t}|X(t)|^2,\ \forall t\in E,$$

其中$\varkappa>0$为充分大常数，由此及(2.26)得(2.27)。 ▮

引理4 设S, $\mathscr{B}(C, L_1, L_2)$是定理2.5假设(i)中的集合，则∃连续映射$N: S\times S\to\mathscr{B}(C, L_1, L_2)$使

$$\Phi(y_1)-\Phi(y_2)=N(y_1, y_2)(y_1-y_2), \ \forall y_1, y_2\in S.$$

证明 因$J(y)=\partial\Phi(y)/\partial y$，故

$$\Phi(y_1)-\Phi(y_2)=\int_0^1\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(y_2+\theta(y_1-y_2))d\theta$$

$$=N(y_1, y_2)(y_1-y_2),$$

其中 $$N(y_1, y_2)=\int_0^1 J(y_2+\theta(y_1-y_2))d\theta\in C^0(S\times S).$$

另方面，假设(i)$\Rightarrow J(y_2+\theta(y_1-y_2))\in\mathscr{B}(C, L_1, L_2)$，因为$y_1$, $y_2\in S$，而S为凸集；所以$|L_1[J(y_2+\theta(y_1-y_2))-C]L_2|\leqslant 1$，从而$N(y_1, y_2)\in\mathscr{B}(C, L_1, L_2)$。 ▮

基于引理3，可引入下列线性映射π，它在证明定理2.5时起重要作用。

对于定理2.5假设(i)中之椭球$\mathscr{B}(C, L_1, L_2)$应用引理3，可得：

∃$\varkappa>0$, $\varepsilon>0$及$V_2(X)=X^*P_2X$使得

$$D[e^{2\lambda t}V_2(X(t))]\leqslant-\varepsilon e^{2\lambda t}|X(t)|^2, \tag{2.29}$$

$$D[e^{2\lambda t}\varkappa V_2(X(t))+e^{2\lambda t}\varepsilon|X(t)|^2]\leqslant 0, \tag{2.30}$$

对$t\in E=[t_0, \infty)$及满足(2.23), (2.25)的一切$X(t)$成立。由于条件(i)中集合$\mathscr{E}_\lambda^j$的$j=2$，故实对称阵P_2有两个负特征值及$(mn-2)$个正特征值。于是，适当选取满秩线性变换$X=Q\operatorname{col}(v, w)$可把二次型$V_2(X)=X^*P_2X$化成平方和

$$V_2(X)=|w|^2-|v|^2,$$

这里$Q\in\mathbb{R}^{mn\times mn}$, $\det Q\neq 0$, $v\in\mathbb{R}^2$, $w\in\mathbb{R}^{mn-2}$。

定义线性映射$\pi:\mathbb{R}^{mn}\to\mathbb{R}^2$如下：

$$\pi X=\sqrt{2}\,v, \ \forall X\in\mathbb{R}^{mn},$$

注意及 $Q^{-1}X=\mathrm{col}(v, w)$, $|Q^{-1}X|^2=|v|^2+|w|^2$, $\forall X\in\mathbb{R}^{mn}$, 故

$$|\pi X|^2+V_2(X)=|Q^{-1}X|^2,\ \forall X\in\mathbb{R}^{mn}. \tag{2.31}$$

引理 5　设 $X_1(t), X_2(t)$ 是 $DX=AX+B\Phi(GX)$ 在 $[t_0, \infty)$ 上的有界解，且 $GX_1(t)$, $GX_2(t)\in S$, $\forall t\in[t_0, \infty)$, 则下列 (i), (ii)中至少有一条成立：

(i) ∃ 常数 $h\geqslant 0$, $c>0$, 使得

$$|X_1(t)-X_2(t+h)|\leqslant ce^{-\lambda t},\ \forall t\in[t_0, \infty); \tag{2.32}$$

(ii) $\forall k>0$, $\exists\tau(k)\geqslant t_0$, 使得

$$\begin{aligned}&|X_1(t)-X_2(t+h)|\leqslant|Q|\cdot|\pi X_1(t)-\pi X_2(t+h)|,\\&\forall t\in[\tau(k), \infty),\ \forall h\in[0, k].\end{aligned} \tag{2.33}$$

证明　因 $X_1(t)$, $X_2(t)$ 是 $DX=AX+B\Phi(GX)$ 的解，由引理 4 得

$$\begin{aligned}D(X_1-X_2)&=A(X_1-X_2)+B[\Phi(GX_1)-\Phi(GX_2)]\\&=[A+B\mathfrak{N}(t)G](X_1-X_2),\end{aligned}$$

$\forall t\in[t_0, \infty)$, 这里 $\mathfrak{N}(t)=N(GX_1(t), GX_2(t))\in\mathscr{B}(C, L_1, L_2)\subset\mathscr{E}^2_\lambda$. 这表明 X_1-X_2 是(2.23)型的线性方程的解(其中 $\mathfrak{N}(t)$ 满足条件 (2.25)). 所以 $X(t)=X_1(t)-X_2(t)$ 满足 (2.29) 和 (2.30). 这意味着 $e^{2\lambda t}V_2(X_1(t)-X_2(t))$, $e^{2\lambda t}[\varkappa V_2(X_1(t)-X_2(t))+\varepsilon|X_1(t)-X_2(t)|^2]$ 这两函数在 $[t_0, \infty)$ 单调递减. 当 $t_0\leqslant\theta\leqslant t$ 时，由此得出

$$e^{2\lambda\theta}V_2(X_1(\theta)-X_2(\theta))\geqslant e^{2\lambda t}V_2(X_1(t)-X_2(t)). \tag{2.34}$$

若 $e^{2\lambda t}V_2(X_1(t)-X_2(t))$在$[t_0, \infty)$囿于下，则存在有限极限

$$\lim_{t\to\infty}e^{2\lambda t}V_2(X_1(t)-X_2(t)),$$

$$\lim_{t\to\infty}e^{2\lambda t}[\varkappa V_2(X_1(t)-X_2(t))+\varepsilon|X_1(t)-X_2(t)|^2].$$

从而当 $t\to\infty$ 时，$e^{2\lambda t}|X_1(t)-X_2(t)|^2$ 趋于一有限极限，并且 ∃ 常数 $c>0$ 使得

$$c^2\geqslant e^{2\lambda t}|X_1(t)-X_2(t)|^2,\ t\in[t_0, \infty). \tag{2.35}$$

如果(2.35)不真，则 $e^{2\lambda t}V_2(X_1(t)-X_2(t))$ 在 $[t_0, \infty)$ 并非囿于下，从而 $0>V_2(X_1(\theta)-X_2(\theta))$ 至少对某一 $\theta(\geqslant t_0)$ 成立．于是，由(2.34)推知 $0\geqslant V_2(X_1(t)-X_2(t))$, $\forall t\geqslant\theta$; 由(2.31)推得

$$|\pi X_1(t)-\pi X_2(t)|\geqslant|Q^{-1}[X_1(t)-X_2(t)]|$$
$$\geqslant|Q|^{-1}|X_1(t)-X_2(t)|,\ \forall t\geqslant\theta. \tag{2.36}$$

所以，或者(2.35)成立，或者(2.36)成立．注意在这两关系式中，可用解 $X_2(t+h)$ 代替 $X_2(t)$（这里 h 是任一个满足 $h\geqslant0$ 的常数），结果不变．这时(2.35)，(2.36)分别变为(2.32)，(2.33)．

假设(2.32)对一切 $h\geqslant0$ 不真，则 $\forall h\geqslant0$, $\exists\theta(h)\geqslant t_0$ 使得

$$0>V_2(X_1(\theta(h))-X_2(h+\theta(h))), \tag{2.37}$$

而(2.33)对一切 $t\geqslant\theta(h)$ 成立．对每个整数 $\nu\geqslant1$，定义

$$H_\nu=\{h\in[0,\ k]\,|\,0>V_2(X_1(t)-X_2(t+h)),$$
$$\text{对某 } t\in[t_0,\ t_0+\nu]\}.$$

显然，$H_{\nu+1}\supset H_\nu$，而且 $(2.37)\Rightarrow[0,\ k]\subset\bigcup_{\nu=0}^{\infty}H_\nu$; 因 H_ν 是 $[0,k]$ 的开集，故 $\{H_\nu\}$ 是 $[0,\ k]$ 的一个开覆盖．由 Heine-Borel 定理可得：$\exists$ 整数 n 使得 $[0,\ k]\subset H_n$．这蕴涵着若 $h\in[0,\ k]$，则(2.37)对某 $\theta(h)\in[t_0,\ t_0+n]$ 成立，这就推出(2.33)对一切 $t\geqslant t_0+n$ 成立．于是每当(i)不真时，取 $\tau(k)=t_0+n$，便有(ii)成立． ∎

引理 6 设 $X_1(t)$, $X_2(t)$ 是方程 $DX=AX+B\Phi(GX)$ 在 $(-\infty,\ \infty)$ 上的有界解，而且满足 $GX_1(t)$, $GX_2(t)\in S$, $\forall t\in(-\infty,\ \infty)$; 则(2.33)及

$$|DX_1(t)|\leqslant|Q|\cdot|\pi DX_1(t)| \tag{2.38}$$

成立，$\forall t\in(-\infty,\ \infty)$, $\forall h\in\mathbb{R}^1$.

证明 目前，(2.34)对于 $-\infty<\theta\leqslant t<\infty$ 成立．因 $\lambda>0$，$X_1(\theta)$ 及 $X_2(\theta)$ 有界，故 $\lim\limits_{\theta\to-\infty}e^{2\lambda\theta}V_2(X_1(\theta)-X_2(\theta))=0$．在(2.34)中令 $\theta\to-\infty$，得 $0\geqslant V_2(X_1(t)-X_2(t))$，这连同(2.31)

推出 (2.36), $\forall t\in(-\infty,\ \infty)$. 在 (2.36) 中用解 $X_2(t+h)$ 代替 $X_2(t)$, 可推出(2.33)成立, $\forall t, h\in\mathbb{R}^1$. 又在(2.36)中用 $X_1(t+h)$ 代替 $X_2(t)$, 并用 $|h|$ 除全式:

$$\frac{|Q|^{-1}\cdot|X_1(t)-X_1(t+h)|}{|h|}\leqslant\frac{|\pi X_1(t)-\pi X(t+h)|}{|h|},$$

令 $h\to 0$, 即得(2.38). ∎

引理 7 设方程 $DX=AX+B\Phi(GX)$ 的一有界半轨道 Γ 的方程为 $X(t)$, 而且 $\exists$ 常数 $c>0$, $h>0$, 使得

$$|X(t)-X(t+h)|\leqslant ce^{-\lambda t},\ \forall t\in[t_0,\ \infty), \tag{2.39}$$

则 Γ 的 ω 极限点集 $\Omega(\Gamma)$ 或者是(2.19)的一条周期轨道, 或者是(2.19)的一个奇点.

证明 考虑级数 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}[X(t+\nu h)-X(t+(\nu+1)h)]$, 由条件(2.39)知

$$|X(t+\nu h)-X(t+(\nu+1)h)|\leqslant ce^{-\lambda(\nu h+t)}, \tag{2.40}$$

由 Weierstrass M 判别法推知 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}[X(t+\nu h)-X(t+(\nu+1)h)]$ 在$[t_0,\ \infty)$上一致收敛. 此级数的前 ν 项和为 $X(t)-X(t+\nu h)$, 故 $X(t+\nu h)\rightrightarrows Y(t)$, 当 $\nu\to\infty$, 其中 $Y\in C^0[t_0,\infty)$. 当 $\nu\to\infty$ 时, 由方程(2.19)可得

$$\begin{aligned}DX(t+\nu h)&=AX(t+\nu h)+B\Phi(GX(t+\nu h))\\&\rightrightarrows AY(t)+B\Phi(GY(t)),\end{aligned}$$

在$[t_0,\ \infty)$上成立. 所以 $Y(t)$ 在$[t_0,\ \infty)$可微, 而且

$$DY(t)=\lim_{\nu\to\infty}DX(t+\nu h)=AY(t)+B\Phi(GY(t)).$$

那就是说, $Y(t)$ 满足方程(2.19). 它是周期为 h 的周期解. 事实上,

$$\begin{aligned}Y(t)&=\lim_{\nu\to\infty}X(t+(\nu+1)h)=\lim_{\nu\to\infty}X((t+h)+\nu h)\\&=Y(t+h).\end{aligned}$$

另外, 由(2.40)得

$$|X(t)-Y(t)| = \left|\sum_{\nu=0}^{\infty}[X(t+\nu h)-X(t+(\nu+1)h)]\right|$$
$$\leqslant ce^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda h})^{-1},$$

故 $\lim\limits_{t\to\infty}|X(t)-Y(t)|=0$. 这表明 $\Omega(\Gamma)=\Omega(\Gamma_0)=\Gamma_0$, 其中 Γ_0 是 $Y(t)$所描述的周期轨道. 假若 $Y(t)$是方程(2.19) 的常数解, 则对应之奇点就是 $\Omega(\Gamma)$. ▮

有了上述准备工作,现来证明定理 2.5.

定理 2.5 的证明 证明方案大致是, 利用线性映射 $\pi:\mathbb{R}^{mn}\to\mathbb{R}^2$ 把方程 $DX=AX+B\Phi(GX)$ 的轨道映射到 $\mathbb{R}^2$ 上去, 然后对这些平面曲线运用平面动力系统 Poincaré-Bendixson 定理的证法,取得预期结果.

按假设 (ii), 半轨道 Γ^+ 有界, 故 $\Omega(\Gamma^+)\neq\emptyset$, 闭且有界. 按假设(iii), $\Omega(\Gamma^+)$不含奇点, 故 $\Omega(\Gamma^+)$由方程 (2.19) 的整条轨道的集合所组成. 这就是说,若 $Y\in\Omega(\Gamma^+)$, 则满足 $X(t_0)=Y$ 的、(2.19) 的任一解 $X(t)$ 定义于整个 $(-\infty, +\infty)$, 而且 $X(t)\in\Omega(\Gamma^+)$, $\forall t\in\mathbb{R}^1$. 因 $\mathscr{B}(C,L_1,L_2)$是 $\mathbb{C}^{r\times s}$ 的闭集, $J(y)\in C^0(\mathbb{R}^s)$, 故用 S 的闭包代替 S 后,假设(i)仍然成立. 因此, 可假定此凸集 S 是闭集. 已知 $GX\in S$, $\forall X\in\Gamma^+$, 故 $GX\in S$, $\forall X\in\Omega(\Gamma^+)$. 因此,可取引理 6 之 $X_1(t)$, $X_2(t)$ 为方程 (2.19) 的属于 $\Omega(\Gamma^+)$ 的任两解. 由于 $\Omega(\Gamma^+)$的任两点 Y_1, Y_2 可表为 $X_1(0)$, $X_2(0)$, 这里 $X_1(t)$, $X_2(t)$是(2.19)的、适当选取的解, 故从(2.33)推得

$$|Y_1-Y_2|\leqslant|Q|\cdot|\pi Y_1-\pi Y_2|, \forall Y_1,\ Y_2\in\Omega(\Gamma^+). \quad (2.41)$$

这表明映射 $\pi:\Omega(\Gamma^+)\to\pi\Omega(\Gamma^+)$ 是同胚映射, 它把 $\Omega(\Gamma^+)$ 的互不相交的轨道映为互不相交的平面曲线,把 $\Omega(\Gamma^+)$ 的周期轨道映为简单闭曲线. 如果 $\Omega(\Gamma^+)$ 有非周期轨道 Γ_1, 则平面曲线 $\pi\Gamma_1$ 不自交. 如果 $\Omega(\Gamma^+)$的轨道 Γ_1 由(2.19) 的解 $X_1(t)$ 描述, 则平面曲线 $\pi\Gamma_1$ 在点 $\pi X_1(t)$ 处的切向量就是 $\pi DX_1(t)$. 由 (2.38) 知, 它为非零向量. 另外, 因 $\Omega(\Gamma^+)$为闭集, 故 $\Omega(\Gamma_1)\subset\Omega(\Gamma^+)$.

现在，故意选取(2.19)的三个解 $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$，使它们对应的轨道 Γ_1, Γ_2, Γ_3 满足条件：$\Gamma_1\subset\Omega(\Gamma^+)$, $\Gamma_2\subset\Omega(\Gamma_1)$, $\Gamma_3\subset\Omega(\Gamma_2)$. 于是 $\Omega(\Gamma_2)\subset\Omega(\Gamma_1)\subset\Omega(\Gamma^+)$. 令 R 为点 $X_3(0)\in\Gamma_3$, 令 $U=\pi DX_3(0)$ 是平面曲线 $\pi\Gamma_3$ 在点 πR 处的非零切向量. 令 $\mathscr{D}$ 是平面上以 πR 为中心，$\delta>0$ 为半径的开圆域. 因 R 是 Γ_1 及 Γ_2 的 ω 极限点，故当 $t\to+\infty$ 时，平面曲线 $\pi\Gamma_1$, $\pi\Gamma_2$ 必经过 $\mathscr{D}$ 无穷多次. 当 $\pi X_1(t)$ 接近 $\pi X_3(0)$ 时，(2.41)$\Rightarrow X_1(t)$ 接近 $X_3(0)$，而(2.19)$\Rightarrow DX_1(t)$ 接近 $DX_3(0)$，因此 $\pi DX_1(t)$ 接近 $U=\pi DX_3(0)$. 于是，若半径 δ 充分小，则在圆域 $\mathscr{D}$ 内沿 $\pi\Gamma_1$ 的一切弧段，切向量均近似地等于 U. 所以，$\pi\Gamma_1$ 的这些弧段近似于平行 U 的直线段. 同理，$\mathscr{D}$ 内 $\pi\Gamma_2$ 的一切弧段亦如此. 把圆 $\mathscr{D}$ 垂直于 U 的直径定义为横截线 T. 于是，$\mathscr{D}$ 内的 $\pi\Gamma_1$ 或 $\pi\Gamma_2$ 的每弧段在 $\mathscr{D}$ 内最多与 T 相交一次.

现来证明，Γ_1, Γ_2 之中至少有一条是周期轨道. 假设不然，则平面曲线 $\pi\Gamma_1$, $\pi\Gamma_2$ 皆不能自交. 所以 $\pi\Gamma_2$ 每次交横截线 T 于不同的点. 设 α, $\beta\in\Gamma_2$, 使得 $\pi\alpha$, $\pi\beta$ 是 $\pi\Gamma_2$ 相继与 T 相交的两点. 于是 $\pi\alpha\neq\pi\beta$, 而且因 $\Gamma_2\subset\Omega(\Gamma_1)$, 故 α, β 是 Γ_1 的 ω 极限点. 所以，存在 $\pi\Gamma_1$ 的弧段，它们与 T 的交点任意接近于 $\pi\alpha$, $\pi\beta$. 可是，利用 Jordan 曲线定理，从图 1 可推知：在 $\pi\Gamma_1$ 于 $\pi\alpha$ 邻域与 T 相交，继着在 $\pi\beta$ 邻域与 T 相交之后，它不能再在 $\pi\alpha$ 邻域与 T 相交

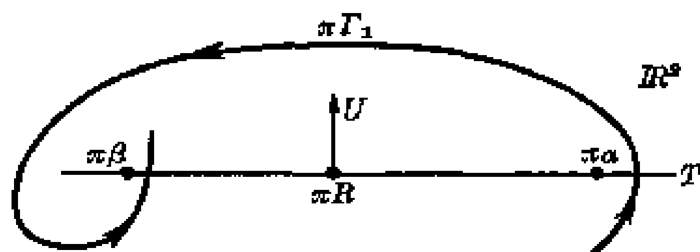


图 1

(因为 $\pi\Gamma_1$ 不能自交，且 $\pi\Gamma_1$ 仅能沿 U 之方向通过 T). 这与 α 是 Γ_1 的 ω 极限点这一断言相矛盾，所以 Γ_1, Γ_2 之中至少有一条为周期轨道. 换言之，$\Omega(\Gamma^+)$ 至少含有一周期轨道 Γ_0.

剩下要证的是：这周期轨道 Γ_0 就是集合 $\Omega(\Gamma^+)$ 本身. 以下

就是此事实的证明。

在引理 5，首先取 $X_1(t)$，$X_2(t)$分别为描述 Γ^+，Γ_0 的解(方程(2.19)的)。若(2.32)成立，则立刻得到：$\Omega(\Gamma^+)=\Omega(\Gamma_0)=\Gamma_0$，正是所欲证的。

假若(2.32)不成立，则 $\forall t\geqslant\tau(k)$，$\forall h\in[0, k]$，(2.33) 成立。当取 $k=\sigma$，σ 为 $X_2(t)$的周期，(2.33) 表明：若 $\pi\Gamma^+$ 的弧段(当 $t\geqslant\tau(\sigma)$)与 $\pi\Gamma_0$ 相交，则 Γ^+ 与 Γ_0 相交。因此，$\Gamma^+=\Gamma_0$，从而 $\Omega(\Gamma^+)=\Gamma_0$，问题解决了。所以，除掉 Γ^+ 对应于 $t<\tau(\sigma)$ 那段弧，并从此假设 $\pi\Gamma^+$ 不和 $\pi\Gamma_0$ 相交。这蕴含 Γ^+ 不是周期轨道。同时，(2.33)表明：$\pi X_1(t)$ 接近于 $\pi\Gamma_0\Rightarrow X_1(t)$ 接近于 Γ_0。现在取引理 5 的 $X_2(t)=X_1\left(t+\frac{1}{2}\sigma\right)$，其中 $X_1(t)$是描述 Γ^+ 的解。这时，若 (2.32) 成立，则 $X_1(t)$ 满足 (2.39)，由引理 7 知，$\Omega(\Gamma^+)=\Gamma_0$。若设(2.32)不真，则(2.33)成立，即

$$\begin{aligned}&\left|X_1(t)-X_1\left(t+h+\frac{1}{2}\sigma\right)\right|\\&\qquad\leqslant|Q|\cdot\left|\pi X_1(t)-\pi X_1\left(t+h+\frac{1}{2}\sigma\right)\right|,\\&\qquad\qquad\forall t\geqslant\tau_1(k),\ \forall h\in[0, k].\end{aligned}$$

因 Γ^+ 非周期，这表明

$$\pi X_1(t)\neq\pi X_1\left(t+h+\frac{1}{2}\sigma\right),\quad 当\quad t\geqslant\tau_1(\sigma),\ 0<h\leqslant\sigma. \tag{2.42}$$

注意在此我们取 $k=\sigma$，σ 是 Γ_0 的周期。现来证明：$\pi\Gamma^+$ 盘旋地趋向简单闭曲线 $\pi\Gamma_0$，当 $t\to+\infty$。任取一点 $R'\in\Gamma_0$，设 T' 是中点为 $\pi R'$，垂直于 $\pi\Gamma_0$ 在 $\pi R'$ 处的非零切向量的横截线。因 $R'\in\Omega(\Gamma^+)$，故存在任意接近于 $\pi R'$ 的、T' 与 $\pi\Gamma^+$ 的交点。所以可选取 $\pi\Gamma^+$ 与 T' 的交点 $P_1=\pi X_1(t_1)$，$P_2=\pi X_1(t_2)$，使得 $\tau_1(\sigma)<t_1<t_2$ 而且 P_2 位于 P_1 和 $\pi R'$ 之间。可假设 P_2 与 $\pi R'$

很接近，以致在 $t_2\leqslant t\leqslant t_2+3\sigma$ 时，$\pi X_1(t)$ 保持接近于 $\pi\Gamma_0$. 于是，在区间 $t_2\leqslant t\leqslant t_2+3\sigma$，至少还有 $\pi\Gamma^+$ 与 T' 的两交点，P_3，P_4，它们分别接近于 $\pi X_1(t_2+\sigma)$，$\pi X_1(t_2+2\sigma)$（参见图 2）.

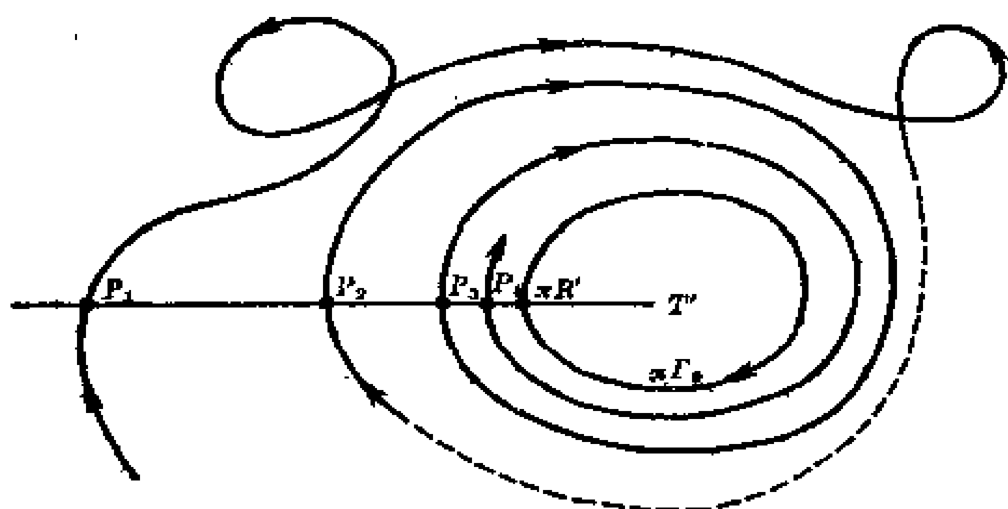


图 2

如 P_3 并不位于 P_2 与 P_4 之间，则 $\pi\Gamma^+$ 的弧段 P_2P_3 与弧段 P_3P_4 交于一点 $\pi X_1(t)=\pi X_1(t+d)$，其中 d 近似地等于 σ. 这便与(2.42)相矛盾. 因此，P_3 必位于 P_2 和 P_4 之间. 首先，如假设 P_3 位在 P_2 与 $\pi R'$ 之间，则 P_4 位于 P_3 与 $\pi R'$ 之间. 反复运用(2.42)，得出一系列的弧段 P_3P_4，P_4P_5，P_5P_6，$\cdots(\subset\pi\Gamma^+)$，它们环绕着 $\pi\Gamma_0$，彼此互不相交，与 T' 相交于点列 P_3，P_4，P_5，$\cdots$，这点列单调趋向于 $\pi R'$，亦即当 $t\to+\infty$，$\pi\Gamma^+$ 盘旋地趋向 $\pi\Gamma_0$. 现来考虑另一可能性，即 P_3 不位于 P_2 和 $\pi R'$ 之间. 可证这时导致矛盾. 此时，P_2 位于 P_3 和 $\pi R'$ 之间. 于是由(2.42)推出：如从 P_2 出发，逆着时间沿 $\pi\Gamma^+$ 往回走，$\pi\Gamma^+$ 的相邻的弧段环绕 $\pi\Gamma_0$ 并与 T' 相交于一点列，这些交点每个都比前一个更接近 $\pi R'$，直至达到 $\pi\Gamma^+$ 上的 P_1 为止. 这蕴含着 P_1 位于 $\pi R'$ 与 P_2 之间，这与 P_1，P_2 之选取法相矛盾. 这就证明了 P_3 必位在 P_2 与 $\pi R'$ 之间，从而当 $t\to+\infty$ 时，$\pi\Gamma^+$ 盘旋地趋向 $\pi\Gamma_0$. 所以，$\pi\Gamma_0=\pi\Omega(\Gamma^+)$. 利用(2.41)可得 $\Gamma_0=\Omega(\Gamma^+)$. ∎

2.4 Sell 定 理

设 (M, d) 是一度量空间，$g:\mathbb{R}^1\times M\to M$ 是 M 上的动力系统。Sell[20] 证明了：若 $g(t, p)$ 是正向 Lagrange 稳定和渐近稳定的，则 Ω_p 是一周期运动。这结果可看作 Poincaré-Bendixson 定理的一种推广。

先引入若干定义：

(i) 运动 $g(t, p)$ 称为 Lagrange 稳定的，如果 $\overline{\Gamma(p)}$ 是紧致的；$g(t, p)$ 称为正向 Lagrange 稳定的，如果 $\overline{\Gamma^+(p)}$ 是紧致的。

(ii) 运动 $g(t, p)$ 称为几乎周期的，如果 $\forall\varepsilon>0$，集合

$$\{\tau\in\mathbb{R}^1 \mid d(g(t+\tau, p), g(t, p))<\varepsilon, \forall t\in\mathbb{R}^1\}$$

在 $\mathbb{R}^1$ 是相对稠密的。一集合 $Y\subset\mathbb{R}^1$ 叫做在 $\mathbb{R}^1$ 是相对稠密的，如果 $\exists L>0$，使长度为 L 的任一区间 $(\alpha, \alpha+L)$ 均具性质：$(\alpha, \alpha+L)\cap Y\neq\emptyset$。

(iii) 运动 $g(t, p)$ 称为相对于集合 $D\subset M$ 是一致正向 Ляпунов 稳定的，如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得

$$q\in\Gamma^+(p),\ \hat{q}\in D,\ d(q, \hat{q})<\delta$$
$$\Rightarrow d(g(q, t), g(\hat{q}, t))<\varepsilon,\ \forall t\geqslant 0.$$

如果 $D=M$，则称 $g(t, p)$ 是一致正向 Ляпунов 稳定的。

(iv) 运动 $g(t, p)$ 称为相对于集合 $D\subset M$ 是(正向)渐近稳定的，如果(甲)它相对于 D 是一致正向 Ляпунов 稳定的和(乙) $\exists\eta_0>0$，使得对于每一满足 $d(q, \Gamma^+(p))<\eta_0$ 的 $q\in D$，$\exists\tau\in\mathbb{R}^1$，使下式成立

$$\lim_{t\to\infty} d(g(t, q), g(t+\tau, p))=0.$$

性质(乙)可用另一方式表达：令

$$A(p)=\{q\in M \mid \exists\tau\in\mathbb{R}^1, \lim_{t\to\infty} d(g(t, q), g(t+\tau, p))=0\},$$

$A(p)$ 称为 $\Gamma^+(p)$ 的吸引区。若 $\exists\eta_0>0$，使得

$$D\cap \mathfrak{V}(\Gamma^+(p);\eta_0)\subset A(p),$$

则运动 $g(t, p)$ 具性质(乙)。这里 $\mathfrak{V}(G;\varepsilon), G\subset M$ 之定义为

$$\mathfrak{V}(G;\varepsilon)=\{x\in M \mid 对某\ a\in G,\ d(x, a)<\varepsilon\}.$$

注意及 $\mathfrak{V}(G;\varepsilon)=\mathfrak{V}(\overline{G};\varepsilon)$, $\forall G\subset M$.

若 $D=M$, 则称 $g(t, p)$ 是渐近稳定的.

(v) 设 $D\subset M$ 为非空不变集合. 我们说动力系统在 D 是等度连续的, 如果 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 使得

$$p,\ q\in D,\ d(p, q)<\delta\Rightarrow d(g(t, p), g(t, q))<\varepsilon,\ \forall t\in \mathbb{R}^1.$$

现来陈述 Sell 定理.

定理 2.7(Sell[20]) 设 $g(t, p)$ 是正向 Lagrange 稳定的, 而且又是渐近稳定的, 则 Ω_p 由一周期运动组成, 即 $g(t, p)$ 以周期运动 $g(t, q)$ 为极限; 而且 $g(t, q)$ 是渐近稳定的.

此定理的证明依赖于下列定理及引理:

定理 2.8(Deysach-Sell[21]) 设 $g(t, p)$ 是正向 Lagrange 稳定的, 对于 $\Gamma^+(p)\cup\Omega_p$ 是一致正向 Ляпунов 稳定的, 则 Ω_p 是几乎周期运动的极小集合.

引理 1(Sell[20]) 设 D 是紧致的、几乎周期运动的极小集合, 则

(甲) 动力系统在 D 上是等度连续的;

(乙) $\forall p,\ q\in D,\ p\neq q$, $\exists \eta>0$ 使得

$$d(g(t, p), g(t, q))\geqslant \eta,\ \forall t\in \mathbb{R}^1.$$

引理 2(Sell[20]) 设 $A_s=\{p\in M \mid g(t, p)\ 渐近稳定\}$, 则

(甲) A_s 是 M 中开集;

(乙) $\Gamma^+(p)\subset A_s\Rightarrow \exists \eta>0$, 使 $\mathfrak{V}(\Gamma^+(p);\eta)\subset A_s$.

引理 3(Sell[20]) 设 $D\subset M$ 是极小集合, $q\in D$, 则

$$D\ 由一条周期轨道组成 \Leftrightarrow D=\Gamma(q).$$

现在先承认这些结果 (定理 2.8 及引理 1～3), 把定理 2.7 的证明勾画出来, 然后分别补证它们.

定理 2.7 的证明 由假设，$g(t, p)$ 既是正向 Lagrange 稳定又是一致正向 Ляпунов 稳定，由定理 2.8 得 Ω_p 是几乎周期运动的极小集合. 另方面，由于 $g(t, p)$ 渐近稳定，故按引理 2 得：$\exists\eta>0$，使

$$\mathfrak{B}(\overline{\Gamma^+(p)};\eta)=\mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\eta)\subset A_s.$$

但是，$\Gamma^+(p)\cup\Omega_p\subset\overline{\Gamma^+(p)}$，所以 $\Omega_p\subset A_s$.

取 $q\in\Omega_p$，则 $g(t, q)$是渐近稳定的. 若 $\Omega_p\neq\Gamma(q)$，则 $\exists\hat{q}\in\Omega_p\setminus\Gamma(q)$. 于是 $\exists\tau\in\mathbf{R}^1$，使

$$\lim_{t\to\infty}d(g(t,\hat{q}),\ g(t+\tau,\ q))=0.$$

这就与引理 1 的结论（乙）相矛盾. 所以，$\Omega_p=\Gamma(q)$. 于是由引理 3 立得 Ω_p 是由一条周期轨道组成. 至于 $g(t, q)$ 的渐近稳定性，由上述($\Omega_p\subset A_s$)已得证. ∎

现来补证定理 2.8 及引理 1～3.

定理 2.8 的证明(Deysach-Sell [21]) 此定理的证明依赖于下列两定理(Немыцкий 与 Степанов [8])：

【1】设 $g(t, p)$是正向 Lagrange 稳定的，而且

(i) $g(t, p)$一致渐近于 Ω_p；

(ii) $g(t, p)$ 对正半轨 $\Gamma^+(p)$ 来说是一致正向 Ляпунов 稳定的，则 Ω_p 是几乎周期运动的极小集合.

【2】设 $g(t, p)$是正向 Lagrange 稳定的，则

$$\Omega_p \text{ 是极小集合} \Leftrightarrow g(t,p)\text{一致渐近于 } \Omega_p.$$

定理 2.8 的证明大意是：$g(t, p)$对于 $\Gamma^+(p)\cup\Omega_p$ 是一致正向 Ляпунов 稳定 $\Rightarrow\Omega_p$是极小集合 $\xRightarrow{【2】}$ $g(t, p)$ 一致渐近于 Ω_p；(连同 $g(t, p)$对 $\Gamma^+(p)$ 是一致正向 Ляпунов 稳定的) $\xRightarrow{【1】}$ Ω_p 是几乎周期运动的极小集合.

以下集中证明： 若 $g(t, p)$ 对于 $\Gamma^+(p)\cup\Omega_p$ 是一致正向 Ляпунов 稳定，则 Ω_p 是极小集合.

因 $g(t,p)$ 是正向 Lagrange 稳定的，所以 $\Omega_p\neq\emptyset$，任取 $q\in\Omega_p$，有 $\overline{\Gamma(q)}\subseteq\Omega_p$，若能证明任取 $r\in\Omega_p$，均有 $r\in\overline{\Gamma(q)}$，则 Ω_p 是极小集合。换言之，欲证明：任取 $q,\ r\in\Omega_p$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\tau\in\mathbb{R}^1$，使 $d(r,\ g(\tau,\ q))<2\varepsilon$。

因 $q,\ r\in\Omega_p$，故存在序列 $\{s_n\}$，$\{t_n\}\subset\mathbb{R}^1$，$s_n\to\infty$，$t_n\to\infty$，使得

$$q_n=g(s_n,\ p)\to q,\ r_n=g(t_n,\ p)\to r\quad(n\to\infty).$$

$\forall\varepsilon>0$，按一致正向 Ляпунов 稳定性的条件，选取 $\delta>0$。当 m 充分大时（例如 $m\geqslant m_0$），因 $q_m\to q$，有

$$d(q_m,\ q)<\delta.$$

于是由一致正向 Ляпунов 稳定性得

$$d(g(t,\ q_m),\ g(t,\ q))<\varepsilon,\ \forall t\geqslant 0.$$

固定 $m(\geqslant m_0)$，有

$$r_n=g(t_n,\ p)=g(t_n-s_m,\ q_m),\ \forall n.$$

又因 $t_n\to\infty$，故存在 n_1，使 $t_n-s_m>0$，$\forall n\geqslant n_1$；于是

$$d(g(t_n-s_m,\ q),\ r_n)=d(g(t_n-s_m,\ q),\ g(t_n-s_m,\ q_m))<\varepsilon,\ \forall n\geqslant n_1.$$

又选取 n_2，使得 $d(r_n,\ r)<\varepsilon$，$\forall n\geqslant n_2$。取 $N\geqslant\max(n_1,\ n_2)$，令 $\tau=t_N-s_m\in\mathbb{R}^1$，则

$$d(g(\tau,\ q),\ r)\leqslant d(g(t_N-s_m,\ q),\ r_N)+d(r_N,\ r)<2\varepsilon.\qquad\blacksquare$$

引理 1 的证明　（甲）这部份相当于 Немыцкий-Степанов[8]，pp. 388～389 的 8.09 的推论（中文版，下册，p. 420 的推论 2）。

（乙）这部份可由（甲）推出。事实上，若不成立，则 $\exists p,q\in D$，$p\neq q$，及序列 $\{t_n\}\subset\mathbb{R}^1$，使当 $d(p,\ q)=2\varepsilon>0$，有

$$d(g(t_n,\ p),\ g(t_n,\ q))\to 0\quad(n\to\infty).$$

对此 $\varepsilon>0$，由（甲），$\exists\delta>0$，于是选取 n 充分大，有

$$d(g(t_n,\ p),\ g(t_n,\ q))<\delta,$$

因而得出矛盾；

$$2\varepsilon - d(p,\ q) = d(g(g(t_n,\ p),\ -t_n),\ g(g(t_n,\ q),\ -t_n)) < \varepsilon.$$

∎

引理2的证明 因为 A_s 是正向不变集合，所以只需要证第二部份，即 $\Gamma^+(p) \subset A_s \Rightarrow \exists \eta > 0$ 使 $\mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\eta) \subset A_s$.

设 $p \in A_s$，由 $g(t,\ p)$ 渐近稳定，$\exists \eta_0 > 0$，使

$$\mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\eta_0) \subset A(p).$$

对于 $\varepsilon_0 = \eta_0/2$，由于 $g(t,\ p)$ 是一致正向 Ляпунов 稳定，故决定一个 $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0) > 0$，使得

$$q \in \Gamma^+(p),\ \hat{q} \in M,\ d(q,\ \hat{q}) < \delta_0$$
$$\Rightarrow d(g,\ (t,\ q),\ g(t,\ \hat{q})) < \varepsilon_0,\ \forall t \geqslant 0.$$

取 $\eta = \delta_0/2$，可证明：$\mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\eta) \subset A_s$，是为引理的第二部份，以下就证明这件事。

为此，我们分两步走，首先证明

$\forall q \in \mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\delta_0)$，渐近稳定性定义中的性质(乙)成立。 (2.43)

其次证明

$\forall q \in \mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\delta_0/2)$，运动 $g(t,\ q)$ 是一致正向 Ляпунов 稳定的。 (2.44)

于是合并(2.43)，(2.44)，得

$\forall q \in \mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\eta)$，渐近稳定性定义中的全部条件成立，即 $\mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\eta) \subset A_s$，是所欲证。

先证(2.43)。

设 $q \in \mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\delta_0)$，由 $\mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\delta_0)$ 定义，$\exists \tilde{q} \in \Gamma^+(p)$，使得 $d(\tilde{q},\ q) < \delta_0$；由 δ_0 之取法，有

$$d(g(t,\ \tilde{q}),\ g(t,\ q)) < \varepsilon_0 = \eta_0/2,\ \forall t \geqslant 0.$$

又因 $\tilde{q} \in \Gamma^+(p)$，故 $\exists \tau \in \mathbb{R}^1,\ \tau \geqslant 0$，使

$$d(g(t+\tau,\ p),\ g(t,\ q)) < \eta_0/2,\ \forall t \geqslant 0.$$

换言之，$q \in \mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\delta_0) \Rightarrow \Gamma^+(q) \subset \mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\eta_0/2)$.

又设 $q\in\mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\delta_0)$，$\hat{q}\in\mathfrak{B}(\Gamma^+(q);\eta_0/2)$，则

$$q,\ \hat{q}\in\mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\eta_0)\subset A(p).$$

因此，$\exists\tau,\ \hat{\tau}\in\mathbb{R}^1$，使得

$$\lim_{t\to\infty}d(g(t,\ q),\ g(t+\tau,\ p))=\lim_{t\to\infty}d(g(t-\tau,\ q),\ g(t,\ p))=0,$$

$$\lim_{t\to\infty}d(g(t,\ \hat{q}),\ g(t+\hat{\tau},\ p))=\lim_{t\to\infty}d(g(t-\hat{\tau},\ \hat{q}),\ g(t,\ p))=0.$$

由此得出　　$\lim\limits_{t\to\infty}d(g(t,\ \hat{q}),\ g(t+\hat{\tau}-\tau,\ q))=0,$

即是说，$\hat{q}\in A(q)$ 或 $\mathfrak{B}(\Gamma^+(q);\eta_0/2)\subset A(q)$，从而(2.43)成立。

其次，证明(2.44)。

因 $g(t,\ p)$ 是一致正向 Ляпунов 稳定的，故 $\forall\varepsilon>0$，按此稳定性定义可决定一个 $\delta(\varepsilon)>0$．又因 $g(t,\ p)$ 是渐近稳定的，故当 $q\in\mathfrak{B}(\Gamma^+(p);\delta_0/2)$，$\exists\tau\in\mathbb{R}^1$，使得

$$\lim_{t\to\infty}d(g(t,\ q),\ g(t+\tau,\ p))=0,$$

所以对于 $\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)>0$，$\exists T\geqslant0$，使

$$d(g(t,\ q),\ g(t+\tau,\ p))<\frac{1}{2}\delta(\varepsilon),\ \forall t\geqslant T. \tag{2.45}$$

［可故意选取 $\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)<\varepsilon$．］

由连续性，$\forall t_1\in[0,\ T]$，$\exists\delta_1>0$，使得

$$d(\hat{q},\ g(t_1,\ q))<\delta_1\Rightarrow d(g(s,\ \hat{q}),\ g(t_1+s,\ q))<\frac{1}{2}\delta(\varepsilon),\ \forall s\in[0,\ T-t_1].$$

［可取 $\delta_1\leqslant\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)$．］

注意到紧致的轨道弧 $g([0,\ T];q)$ 被开集族

$$\{\mathfrak{B}(g(t_1,\ q);\delta_1)\mid t_1\in[0,\ T]\}$$

所覆盖，故可选出有限子覆盖，记之为

$$\mathfrak{B}(g(t_1,\ q);\delta_1),\ \cdots,\ \mathfrak{B}(g(t_n,\ q);\delta_n).$$

令 $\bar{\delta}=\min(\delta_1,\ \cdots,\ \delta_n)$，可证下列成立：

$$\text{对某}\ \hat{\tau}\geqslant 0,\ d(\hat{q},\ g(\hat{\tau},\ q))<\tilde{\delta}$$
$$\Rightarrow d(g(t,\ \hat{q}),\ g(t+\hat{\tau},\ q))<2\varepsilon,\ \forall t\geqslant 0.$$

即 $g(t,\ q)$ 是一致正向 Ляпунов 稳定的。以下就证此事。

为此，分两种情形讨论，(i) $0\leqslant\hat{\tau}\leqslant T$，及 (ii) $T<\hat{\tau}$。

情形(i)，有

$$d(g(s,\ \hat{q}),\ g(s+\hat{\tau},\ q))<\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)<\varepsilon,\ \forall s\in[0,\ T-\hat{\tau}].\quad(2.46)$$

在(2.45)中取 $t=T$，在(2.46)中取 $s=T-\hat{\tau}$，可得

$$d(g(T-\hat{\tau},\ \hat{q}),\ g(T+\tau,\ p))\leqslant d(g(T-\hat{\tau},\ \hat{q}),\ g(T,\ q))$$
$$+d(g(T,\ q),\ g(T+\tau,\ p))<\delta(\varepsilon).$$

注意及此 $\delta(\varepsilon)$ 是按 $g(t,\ p)$ 的一致正向 Ляпунов 稳定性定义取定的，故

$$d(g(t',\ g(T-\hat{\tau},\ \hat{q})),g(t',\ g(T+\tau,\ p)))<\varepsilon,\ \forall t'\geqslant 0,$$

或 $d(g(t'+T-\hat{\tau},\ \hat{q}),\ g(t'+\tau+\hat{\tau}+T-\hat{\tau},\ p))<\varepsilon,\ \forall t'\geqslant 0.$

从而得

$$d(g(t,\ \hat{q}),\ g(t+\hat{\tau}+\tau,\ p))<\varepsilon,\ \forall t\geqslant T-\hat{\tau}.\quad(2.47)$$

改写(2.45)，(2.46)，得

$$d(g(t+\hat{\tau},\ q),\ g(t+\hat{\tau}+\tau,\ p))<\varepsilon,\ \forall t\geqslant T-\hat{\tau},\quad(2.45^*)$$
$$d(g(t,\ \hat{q}),\ g(t+\hat{\tau},\ q))<\varepsilon,\ \forall t\in[0,\ T-\hat{\tau}].\quad(2.46^*)$$

把(2.45*)与(2.47)合并，运用三角形不等式，有

$$d(g(t,\ \hat{q}),\ g(t+\hat{\tau},\ q))<2\varepsilon,\ \forall t\geqslant T-\hat{\tau}.$$

把此式与(2.46*)合并，即得

$$d(g(t,\ \hat{q}),\ g(t+\hat{\tau},\ q))<2\varepsilon,\ \forall t\geqslant 0.$$

情形(ii)。由假设，$d(\hat{q},\ g(\hat{\tau},\ q))<\tilde{\delta}\leqslant\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)$，所以由(2.45)，得 $d(\hat{q},\ g(\tau+\hat{\tau},\ p))<\delta$，由 $g(t,\ p)$ 的一致正向 Ляпунов 稳定性，有

$$d(g(t,\ \hat{q}),\ g(t+\tau+\hat{\tau},\ p))<\varepsilon,\ \forall t\geqslant 0.\quad(2.48)$$

结合(2.45)和(2.48)，有

$$d(g(t, \hat{q}), g(t+\hat{\tau}, q)) < 2\varepsilon, \ \forall t \geqslant 0. \qquad \blacksquare$$

引理 3 的证明 若 D 是由一条周期轨道组成,则显然有

$$D = \overline{\Gamma(q)} = \Gamma(q).$$

反之,注意到 Немыцкий–Степанов[8], p. 361 的 5.13 推论(或中文本 p. 384 定理 21 的推论),可知:若极小集合 D 不是由一条周期轨道组成,则 D 含有不可数条不同的轨道,从而 $D \neq \Gamma(q)$, $\forall q \in D$. $\blacksquare$

[注 1] 这里的"渐近稳定性"定义比一般文献中所见的有关定义要求更强,因此处要求 Ляпунов 稳定是一致的.

[注 2] 如结合动力系统 (1.1),可得出 Sell 定理的特殊情形,参见 Cronin[121].

2.5 Schweitzer 的反例

在应用时, Poincaré-Bendixson 定理的推论——环域原理,是研究平面动力系统周期轨道存在性的重要工具.

定理 2.9(Poincaré-Bendixson 环域原理) 设 $A \subset \mathbb{R}^2$ 是一环域,其内不含 (1.1) 的奇点(目前 $n=2$),当 t 增大时,(1.1) 的轨道 $\Gamma(p)$, $p \in \partial A$ 均进入 $\mathrm{Int}(A)$,则在 A 内至少存在 (1.1) 的一条周期轨道.

一个自然的问题是:此原理能否推广到 $n(\geqslant 3)$ 维动力系统?在这方面,有一个著名的问题(参见 Smale[22], Fuller[23]):

设 $T^3 = S^1 \times D^2$, 在 T^3 上给定一个非奇异的 $C^r(r \geqslant 1)$ 向量场 X, $X(p)$, $p \in \partial T^3$ 均指向 $\mathrm{Int}(T^3)$,问 X 在 T^3 内是否一定有周期轨道?

1974, Schweitzer[24] 优美地举出一反例,阐明具上述性质的 C^1 向量场 X 不一定有周期轨道.

在同一文中, Schweitzer 还给 Seifert 猜想("S^3 上的非奇异

C^r 向量场是否必有闭积分曲线?")以否定回答(C^1 情形).

这些结果被公认为近年来动力系统理论的一个引人注目的进展。但是,迄今为止,在 $C^r(r\geqslant 3)$ 情形,这两问题仍未解决.

现来扼要地介绍 Schweitzer 的反例[注].

在实心环 $T^3=S^1\times D^2$ 上定义一向量场 $Y\in C^\infty$, Y 在 ∂T^3 的向量均指向 $\mathrm{Int}(T^3)$, Y 有唯一闭轨道 γ,它就是 T^3 的中心圆.任取一点 $P_0\in\gamma$, 在 P_0 的邻域 $U(P_0)$ 对 Y 修改一下,使得存在一个以 P_0 为中心的圆柱 $W(P_0)\subset U(P_0)$, 在 $W(P_0)$内的积分曲线都是平行于 $Y(P_0)$ 的直线,这里 $Y(P_0)$ 是修改后的向量场在 P_0 的向量;另外,修改后,$\tilde{\gamma}$ 是唯一的闭轨道,它在 $W(P_0)$ 内那段就是该圆柱的轴线.向量场 Y 的其余部份定性地与原来的一样.

构造一个 Schweitzer 图块,然后把它嵌入 $W(P_0)$ 中以便截断上述之闭轨 $\tilde{\gamma}$ 并保持所产生的向量场 $\tilde{Y}\in C^1$; 这就是一个定义在 T^3 上,在 ∂T^3 指向 $\mathrm{Int}(T^3)$,没有闭轨道的 C^1、非奇异向量场,是为 Schweitzer 反例.

Schweitzer 图块的构造如下:

设在 T^2 上给定一个具例外极小集合 $\mathscr{C}$ 的 Denjoy 向量场 (C^1). 令 $N=T^2\setminus D^2$, $D^2\subset T^2\setminus\mathscr{C}$. 把 N 连续地变形为一个高速公路立体交叉,见图 3. 令 $\mathrm{B}=N\times D^1$, 在 B 上定义一个 C^1 向量场,使具下列性质:

(a) 没有闭轨道;

(b) 它在 $N\times\{1/2\}$, $N\times\{-1/2\}$ 处各有一极小集合,皆为 $\mathscr{C}$ 的复制品;

(c) $\bar{N}\times D^1$ 的每一轨道或者渐近于上述极小集合之一,或者与 $\bar{N}\times D^1$ 的边界交于$(n,\ -1)$或$(n,\ 1)$, $n\in N$;

(d) $\exists P'=(n^*,\ 1)$, $P''=(n^*,\ -1)$, $n^*\in N$, 使得 $\Gamma^-(P')\subset \mathrm{B}$, $\Gamma^+(P'')\subset\mathrm{B}$;

[注] 参考北京大学丁同仁的讲稿(1978, 8, 青岛市,全国常微分方程会议).

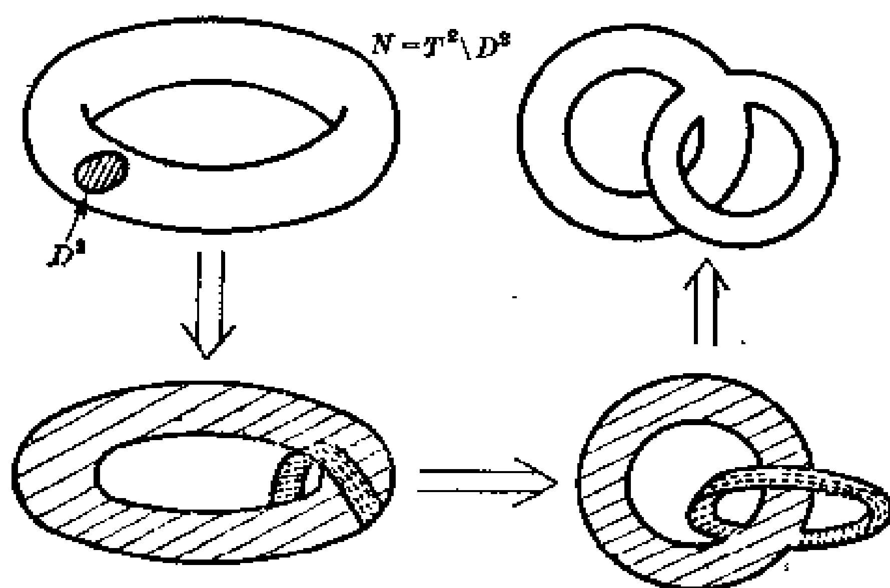


图 3

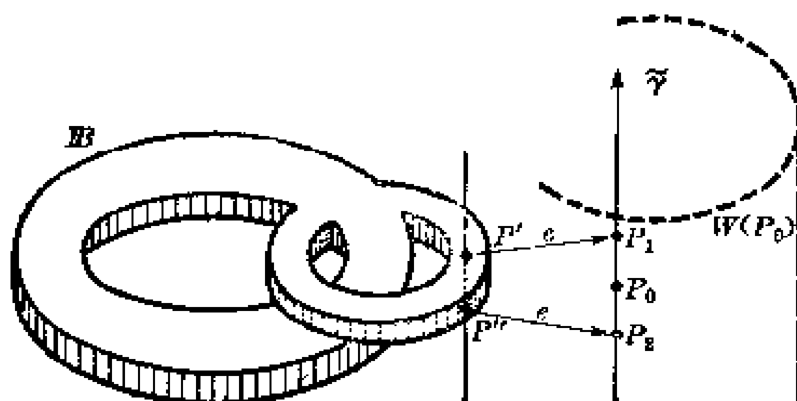


图 4

(e) 在 $\partial\mathbb{B}$ 的向量与 $Y(P_0)$相同.

于是把 $\mathbb{B}$ 嵌入到 $W(P_0)$, $e:\mathbb{B}\to W(P_0)$, 使 $P'\mapsto P_1$, $P''\mapsto P_2$, 如图 4 所示, 从而截断了 $\tilde{\gamma}$, 所得的向量场 $\tilde{Y}\in C^1$, 没有闭轨道.

$\mathbb{B}$ 上的向量场(具性质(a)～(e))的存在性, 在 Schweitzer 文章[24]中是用"主要引理"来保证的. 该"主要引理"内容如下:

设 N 是连通的 q 维流形(无边界), Z 是 N 上的非奇异 $C^r(r\geqslant 1)$向量场, 它有一紧致的不变集合 $\mathscr{C}\subset N$. 令 $D^1=[-1,1]$, 在 $N\times D^1$ 上定义向量场 $X_0=(0, X)$ 及 $Z_0=(Z, 0)$, 其中 X 是 D^1 上的一个常数(非零)向量场,

主要引理([24, p. 390]) 在 $N\times D^1$ 上存在 C^r 向量场 $X_0\simeq X_1$ 的同伦，它在 $N\times(-1, 1)$ 中含有一个紧致的承载子，使得 X_1 的每个闭轨道只有两种可能：

(1) 一个从 $(n, -1)$ 到 $(n, 1)$ 的弧段，其中 $n\in N\setminus\mathscr{C}$；

(2) Z_0 在 $\mathscr{C}\times\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$ 内的一个闭轨道.

我们也可以不借助此引理，直接在 $\mathbb{B}$ 上构造一个 C^1 向量场，使它具备性质(a)～(e). 下面介绍一种造法[注].

先回顾两件基本事实：

(甲) $\exists\lambda:\mathbb{R}^1\to[-1,1]$, $\lambda\in C^\infty$，使得 $\lambda(-t)=-\lambda(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}^1$, $\lambda^{-1}(0)=(-\infty, -1]\cup[1, \infty)\cup\{0\}$, $\lambda^{-1}(1)=\frac{1}{2}$.

(乙) 对于有边界 ∂M 的流形 M，紧致集 $\mathscr{C}\subset M\setminus\partial M$，$\exists\varphi$: $M\to[0, 1]$, $\varphi\in C^\infty$，使得 $\varphi^{-1}(0)=\partial M$, $\varphi^{-1}(1)=\mathscr{C}$.

于是有下列命题.

命题 设 v 是 M 上一个 C^1 向量场，有一个紧致不变集合 $\mathscr{C}\subset M$. 在 $M\times[-1, 1]$ 定义向量场 $V=(u, w)$ 为

$$u(x, t)=\lambda(t)\varphi(x)v(x),\ \forall(x, t)\in M\times[-1, 1],$$

$$w(x, t)=1-\lambda^2(t)\varphi(x),\ \forall(x, t)\in M\times\{-1, 1\}.$$

则 V 具有上述的五性质(a)～(e).

Schweitzer 反例的要点之一是利用 C^1 的 Denjoy 向量场的例外极小集合的回复运动把原来向量场的唯一周期轨道截断. 这里 C^1 起重要作用，因为按定理 2(Schwartz)，T^2 上的 C^2 向量场，不可能有例外极小集合.

鉴于 Schweitzer 的反例，如欲保证 T^3 上的非奇异 C^1 向量场(在 ∂T^3 指向 $\mathrm{Int}(T^3)$)存在周期轨道，需对向量场附加一些条件. 常用的方法是引用“环区原理”，这将在下一章里讨论.

[注] 这是北京大学姜伯驹提出的.

关于 Poincaré-Bendixson 定理，还有下述工作：

Hastings [195] 用“形状理论”(shape theory，参考 Borsuk [196]) 讨论了 $\mathbb{R}^n$ 中类似于平面 Poincaré-Bendixson 定理的问题．其主要结果是：设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个有边界的紧致 n 维子流形，$g:\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是连续的半动力系统 (semi-dynamical system)，当 t 增加时，过 M 的边界的轨道都进入 M 内．则存在正向渐近稳定的紧致不变集(正向及负向) $K\subset \mathrm{Int}M$，使得包含关系 $K\hookrightarrow M$ 是形状等价关系(shape equivalence)．[195] 指出，K 可能是“病态的”．例如，对于没有奇点的动力流，K 可以是 $S_w\times S^1$，其中 S_w 是 Warsaw 圆．“华沙圆”(Warsaw circle) 是在圆上把一段弧换为 $\sin\frac{1}{x}$ 曲线及其极限线段而得出的图形(见图 5)．

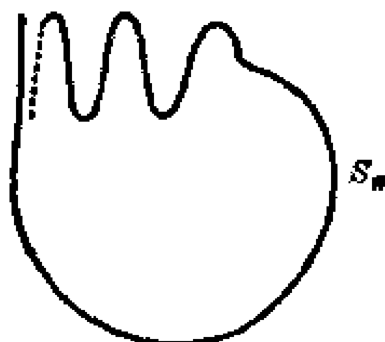


图 5

董镇喜 [197]，Camacho [198]，Markus [199]．

3. 周期轨道的存在性

多年来，研究 $n(\geqslant 3)$ 维动力系统周期轨道的存在性，多依靠"环区原理"。

3.1 环区原理

定理 3.1 (环区原理，Poincaré[12]，Pliss (Плисс) [25]，Reissig, Sansone, Conti[26]) 设系统 (1.1) 自环区 T 的边界 ∂T 出发的轨道当 $t\to\infty$ 时进入 $\mathrm{Int}(T)$，T 有一 $(n-1)$ 维"截面" S^{n-1}，它是在 $t=0$ 时穿过它的一切轨道的局部横截面，而且每一轨道 $g(t,p)$，$p\in S^{n-1}$ 当 $t=\omega(p)>0$ 时返回 S^{n-1}，即 $g(\omega,p)\in S^{n-1}$。则 T 包含 (1.1) 的周期轨道。

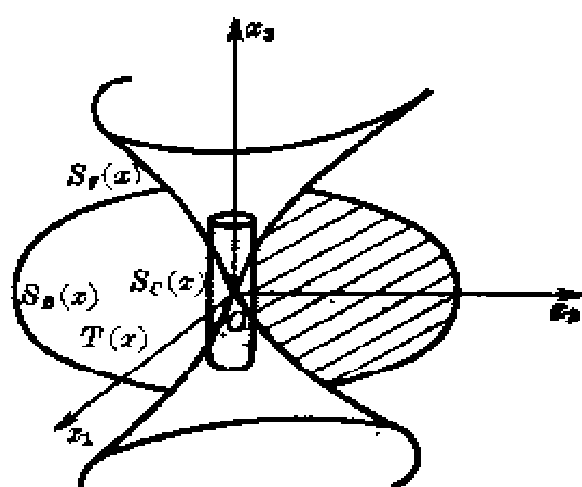


图 6

证明 参见[25]，[26]；所用的工具是 Brouwer 不动点原理。有关 Brouwer 不动点原理的证明，参见 Smart[27]；1978，Milnor[28] 给出一个初等证明；1980，

Rogers[29] 改进并简化了其证明(见附录 1). ∎

在构造环区 T 时，其边界 ∂T 往往可用 Ляпунов 函数来定义. 例如，对于非线性反馈系统

$$\dot{x}=Ax-bf(c^*x),$$

其中 f 为非线性函数，可用下型的曲面组成 ∂T:

$$S_Q(x)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,x^*Qx+\alpha\int_0^{c^*x}f(\theta)d\theta\leqslant\beta\right\},$$

其中 $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称阵，α, β 为适当选取的常数. 在 $\mathbb{R}^3$ 情形，图 6 显示这种环区的概貌. 这时 $T(x)=S_B(x)\cap S_V(x)\cap S_C(x)$，其中 $S_B(x)$ 是包含原点的一个椭球型区域，$S_V(x)$ 是一锥型区的外部，$S_C(x)$ 是一小柱体的外部，其作用是除掉原点.

3.2 Smith 定理的推论

在 2.3 中描述过的 Smith 定理(定理 2.5 及定理 2.6)可用来获得保证方程(2.18)，即

$$f(D)x+b\Phi(g(D)x)=0$$

存在非常数周期解的充分条件.

先讨论耗散系统.

如果存在常数 μ，使得系统(2.19)的每一解 $X(t)$ 满足

$$\limsup|X(t)|\leqslant\mu(t\to+\infty),$$

则称方程(2.18)是耗散的. 有一简单的充分条件，保证 (2.18) 是耗散的:

$\exists$ 常阵 $H\in\mathscr{E}_0^0$，使得 $|y|^{-1}[\Phi(y)-Hy]\to0(y\to\infty)$. 事实上，当此条件成立时，(2.19) 可写成 $DX=KX+\psi(X)$，其中 $K=A+BHG$ 是一常阵，其一切特征根 z 满足 $\mathrm{Re}(z)<0$，而

$$\psi(X)=B[\Phi(GX)-HGX]=o(X)\,(X\to\infty).$$

于是引用 Плисс[25, p. 42] 的一个定理，可得(2.18)是耗散的.

定理 3.2(Smith[17]) 设方程(2.18)满足下列四条件:

(i) $\Phi(0)=0$, $f(0)x+b\Phi(g(0)x)\neq 0$, $\forall 0\neq x\in\mathbb{R}^m$;

(ii) $\Phi(y)$的 Jacobi 阵 $J(y)$满足 $J(0)\in\mathscr{E}_0^2$;

(iii) $J(y)$满足条件

$$\operatorname*{Range}_{y\in\mathbb{R}^s} J(y)\subset\mathscr{B}(C,\ L_1,\ L_2)\subset\mathscr{E}_\lambda^2,\ \lambda>0;$$

(iv) 方程(2.18)是耗散的.

则方程(2.18)至少存在一个非常数周期解 $x(t)$. 而且(2.19)的每个半轨道 Γ, 其 $\Omega(\Gamma)$或者是奇点 O, 或者是一周期轨道.

证明 先粗略观察各条件之作用:

(i) $\Rightarrow x=0$ 是(2.19)的唯一奇点; (ii)$\Rightarrow A+BJ(0)G$ 有两个特征根 z 满足 $\operatorname{Re}(z)>0$, 其余$(mn-2)$个特征根满足 $\operatorname{Re}(z)<0$; (iii)$\Rightarrow$ 可应用 2.3 节的引理 3, 从而(2.29), (2.30)对 (2.19) 的一切解 $X(t)$成立; (iv)$\Rightarrow$(2.19)的每一半轨 Γ 皆有界.

本定理的证明线索是:

因 $G\in\mathbb{R}^{s\times mn}$, $X\in\mathbb{R}^{mn}$, 故 $GX\in\mathbb{R}^s$, 今取 $S=\mathbb{R}^s$, 所以(2.19)的任一轨道 (设其方程为 $X(t)$)必有 $GX(t)\in S$, $\forall t\geqslant 0$. 连同假设(ii), (iii), (iv)可见定理 2.5 的假设全部成立. 于是依据定理 2.5 及条件(i), 有:

要证定理的前半部, 只需证明至少对(2.19)的一个半轨道 Γ 有 $O\notin\Omega(\Gamma)$. (因定理 2.5 保证, 如 $\Omega(\Gamma)$ 不含奇点则必是周期轨道.)

要证定理的后半部, 运用(2.29), (2.30)两式.

现来分别论述之.

先证明: 系统(2.19)至少有一半轨道 Γ 具性质

$$O\notin\Omega(\Gamma).$$

对本定理假设(iii)中的 $\mathscr{B}(C,\ L_1,\ L_2)$应用 2.3 节之引理 3, 得出(2.29)及二次型 $V_2(X)$. 于是(2.19)的半轨道 Γ 分成两类:

（甲）$\Gamma\subset\{X\in\mathbb{R}^{mn}|V_2(X)<0\}$；

（乙）$\Gamma\subset\{X\in\mathbb{R}^{mn}|V_2(X)\geqslant0\}$.

可以证明（甲）中的 Γ 必具性质 $O\notin\Omega(\Gamma)$；（乙）中的 Γ 必具性质 $\Omega(\Gamma)=\{O\}$.

事实上，由假设(ii)，$J(0)\in\mathscr{E}_0^2\Rightarrow A+BJ(0)G$ 有两特征根 z, $\mathrm{Re}(z)>0$，其余 $(mn-2)$ 个特征根 z, $\mathrm{Re}(z)<0$. 故存在可逆阵 $R\in\mathbb{R}^{mn\times mn}$，用代换 $X=R(u,\ v)^T$, $u\in\mathbb{R}^2$, $v\in\mathbb{R}^{mn-2}$，可把(2.19)的线性部分 $DX=[A+BJ(0)G]X$ 化为

$$Du=pu,\ Dv=-qv,$$

其中 p, q 为实阵，它们的特征根皆具正实部. 因 $\Phi(y)=N(y,0)y$，故当 $y\to0$ 时，有 $\Phi(y)=J(0)y+o(|y|)$. 所以可改写 (2.19) 为 $DX=[A+BJ(0)G]X+\psi(X)$，其中 $\psi(X)=o(|X|)(X\to0)$. 用上述代换 $X=R(u,\ v)^T$，可把这改写后的(2.19)变为

$$Du=pu+\psi_1(u,\ v),\ Dv=-qv+\psi_2(u,\ v),\qquad(3.1)$$

其中 ψ_1, ψ_2 在 $(u,\ v)\to(0,\ 0)$ 时皆为 $o(|u|+|v|)$. 在选取 R 时，可使 p^*+p 为正定阵.

在 (2.29) 式所确定的二次型 $V_2(X)$ 中用 $X=R(u,\ v)^T$ 代入，得

$$W(u,\ v)=V_2(R(u,\ v)^T).$$

因 (2.29) 表明：对于 (2.19) 或其线性化方程的一切解 $X(t)$，$e^{2\lambda t}V_2(X(t))$ 是严格递减函数，故对于(3.1)及其线性化方程的一切解，$e^{2\lambda t}W(u(t),\ v(t))$ 是严格递减函数. 对于方程 $Du=pu$, $Dv=-qv$ 满足 $u(0)=0$, $v(0)\neq0$ 的任一解，有

$$\begin{aligned}W(0,\ v(0))&>e^{2\lambda t}W(0,\ v(0)e^{-qt})\\&=W(0,\ v(0)e^{(\lambda-q)t}),\ \forall t>0.\end{aligned}\qquad(3.2)$$

又因 $J(0)\in\mathscr{E}_\lambda^2$，阵 $A+BJ(0)G$ 有 $(mn-2)$ 个特征根 z 满足 $\mathrm{Re}(z)<-\lambda$. 所以，$\lambda I-q$ 的所有特征根 $\lambda+z$ 满足 $\mathrm{Re}(z+\lambda)<0$，而且 $t\to+\infty$ 时 $e^{(\lambda-q)t}\to0$. 在(3.2)式中令 $t\to+\infty$，得 $W(0,v)$

$>0,\ \forall 0\neq v\in\mathbb{R}^{mn-2}$. 于是若$(u,\ v)$是使 $W(u,\ v)\leqslant 0$ 的任一向量，则对某些常数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma>0$，有

$$\alpha|v|^2\leqslant W(0,\ v)\leqslant W(0,\ v)-W(u,\ v)$$
$$\leqslant\beta|u|^2+\gamma|u|\cdot|v|.$$

这蕴涵着

$$|u|\geqslant|v|\alpha[\gamma+(\alpha\beta)^{1/2}]^{-1},\ \forall(u,\ v)\quad 使\quad W(u,\ v)\leqslant 0.$$

由此推出当$(u,\ v)\to(0,\ 0)$，$(u,\ v)\in\{(u,\ v)\in\mathbb{R}^{mn}|W(u,\ v)\leqslant 0\}$时，有 $\psi_1(u,\ v)=o(|u|)$。

另方面，p^*+p 正定 $\Rightarrow\exists\ \eta>0,\ \delta>0$ 使得(3.1)的解满足

$$D(|u|^2)=u^*(p^*+p)u+2\psi_1(u,\ v)^*u\geqslant\eta|u|^2, \qquad (3.3)$$

其中 $|u|\leqslant\delta,\ W(u,\ v)\leqslant 0$. 又因 $e^{2\lambda t}W(u(t),\ v(t))$对(3.1)一切解皆为严格递减，故使 $W(u(t_0),v(t_0))<0$ 的任一解必有 $W(u(t),\ v(t))<0,\forall t\geqslant t_0$. 因为 $W(0,v)>0$，故任一这样的解必有 $u(t)\neq 0,\ \forall t\geqslant t_0$. 若 $|u(t_0)|<\delta$，则 (3.3)$\Rightarrow|u(t)|$ 必递增直至超过 δ，并且从此保持 $|u(t)|>\delta$. 这证明了对于位在$\{(u,v)\in\mathbb{R}^{mn}|W(u,\ v)<0\}$ 的(3.1)的任一半轨道，其 ω 极限点集不含原点 O. 于是相应地有：对于(2.19)位于 $V_2(X)<0$ 的 Γ 而言，$O\notin\Omega(\Gamma)$. 因而由定理 2.5 立得，$\Omega(\Gamma)$是一条周期轨道。

现来证明(乙)中的 Γ 必具性质 $\Omega(\Gamma)=\{O\}$.

(3.1)的解 $X(t)$满足(2.29)，(2.30)$\Rightarrow$下列两函数单调下降：

$$e^{2\lambda t}V_2(X(t)),\quad e^{2\lambda t}[\varkappa V_2(X(t))+\varepsilon|X(t)|^2].$$

故当 $V_2(X(t))\geqslant 0,\ \forall t\in\mathbb{R}^1$，这两函数在 $t\to+\infty$ 时趋于有限极限，从而 $e^{2\lambda t}|X(t)|^2$ 趋于有限极限. 故 $|X(t)|\to 0(t\to+\infty)$. 换言之，系统 (3.1) 的每一个位于 $V_2(X)\geqslant 0$ 的半轨道 Γ，其 $\Omega(\Gamma)=\{O\}$. ∎

【注】 当 $r=s=1$ 时，方程 $f(D)x+b\Phi(g(D)x)=0$ 是下形 $x\in\mathbb{R}^m$，$g(D)=g_0+g_1D+\cdots+g_{n-1}D^{n-1}$，$g_i\in\mathbb{R}^{1\times m}$；$f(D)=f_0+f_1D+\cdots+f_nD^n$，

$f_1\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $b\in\mathbb{R}^{m\times 1}$, Φ: $\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$. 这特款与 Леонов, Буркин[38] 的结果基本相同. 但[38]用更强的条件代替本定理的条件(i)并把条件 (iii) 用频域语言表述. 可是, $r=1$ 是[38]的定理的重要条件. 另外, Grasman[55]的定理有类似于本定理(i), (ii), (iv)的假设, 虽然其它假设与本定理之(iii)迥异.

对于非耗散系统, 上定理改为下形:

定理 3.3(Smith[17]) 设方程(2.18)满足下列诸条件:

(i) $\Phi(0)=0$, $f(0)x+b\Phi(g(0)x)\neq 0$, $\forall 0\neq x\in\mathbb{R}^m$;

(ii) $\Phi(y)$ 的 Jacobi 阵 $J(y)$ 满足 $J(0)\in\mathscr{H}=\mathscr{E}^0_0$;

(iii) $J(y)$ 满足条件

$$\operatorname*{Range}_{y\in\mathbb{R}^s} J(y)\subset\mathscr{B}(C,\ L_1,\ L_2)\subset\mathscr{E}^2_\lambda,\ \lambda>0;$$

(iv) $|y|^{-1}[\Phi(y)-Ky]\to 0(y\to 0)$, 对某常阵 $K\in\mathscr{E}^2_0\cap\mathscr{B}(C,\ L_1,\ L_2)\cap\mathbb{R}^{r\times s}$ 成立;

则方程(2.18)至少存在一非常数周期解 $x(t)$. 而且, 对于 (2.19) 的每一半轨道 Γ^+, $\Omega(\Gamma^+)=\emptyset$ 或 $\Omega(\Gamma^+)=\{O\}$ 或 $\Omega(\Gamma^+)$ 是一周期轨道.

证明 方法与证明定理 3.2 类似. 详情参见 [17, pp. 75～76]. ∎

利用定理 3.2, 在一定条件下, 可证明方程

$$D^3x+\alpha D^2x+\beta Dx+\Phi(x)=0,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \Phi\in C^1(\mathbb{R}^1)$$

存在非常数周期解, 参见[17, p. 77 定理 4]. 另外还证明了方程

$$D^3\xi+D^2\psi_1(\xi)+D\psi_2(\xi)+\psi_3(\xi)=0$$

在一定条件下存在非常数周期解(见[17, pp. 78～79, 定理 5]), 此结果与 Вайсборд[49]的有联系, 但彼此各有千秋.

Smith[18] 利用 [17] 的基本思想, 把定理 2.3(Poincaré-Bendixson) [参见 2.3 节]推广到系统(2.21), 即

$$Dx=f(x),$$

其中 f: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $f\in C(\mathbb{R}^n)$, $D=d/dt$. 这就是该文 p. 156 的定理 2 及 p. 157 的定理 3 (见本书 2.3 节的定理 2.6).

3.3 Королев 论断的反例

环区原理的基本工具是 Brouwer 不动点定理. Королев[54] 曾尝试用 Banach 不动点定理处理系统 (1.1) 的周期轨道存在性及唯一性问题.

考虑动力系统

$$\dot{x}_i=F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ i=1, \cdots, n, \tag{3.4}$$

其中 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathbb{R}^n$, $F_i\in C(\mathbb{R}^n)$, $n\geqslant 3$. Королев[54] 对系统(3.4)作如下假设:

(I) $\exists x_3^*, \cdots, x_n^*\in\mathbb{R}^1$, 使得由下列系统定义的向量场在 ∂K 指向 $\mathrm{Int}(K)$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=F_1(x_1, x_2, x_3^*, \cdots, x_n^*),\\ \dot{x}_2=F_2(x_1, x_2, x_3^*, \cdots, x_n^*).\end{cases} \tag{3.5}$$

这里 K 是 x_1x_2 平面上包含原点的一个星形区域(即原点 $O\in\mathrm{Int}(K)$, 而且每条自 O 出发的半射线与 ∂K 相交于唯一的一点).

设 $V=\mathrm{Int}(K)\times I_3\times\cdots\times I_n$, 其中 $I_s=[x_s^*, \infty)$, $s=3, \cdots, n$; ∂V 由下列超曲面组成

$S=\partial K\times I_3\times\cdots\times I_n$,

$S_3=\mathrm{Int}(K)\times x_3^*\times I_4\times\cdots\times I_n$,

$S_r=\mathrm{Int}(K)\times I_3\times\cdots\times I_{r-1}\times x_r^*\times I_r\times\cdots\times I_n$, $r=4, \cdots, n-1$,

$S_n=\mathrm{Int}(K)\times I_3\times\cdots\times I_{n-1}\times x_n^*$.

(II) $\dfrac{x_1F_2-x_2F_1}{x_1^2+x_2^2}\geqslant\alpha>0$, $\forall(x_1, \cdots, x_n)\in V$;

(III) $F_k>0$, $\forall(x_1, \cdots, x_n)\in S_k$, $k=3, \cdots, n$;

(IV) $\dfrac{\partial F_2}{\partial x_k}F_1-\dfrac{\partial F_1}{\partial x_k}F_2\leqslant 0$, $\forall(x_1, \cdots, x_n)\in S$, $k=3, \cdots, n$.

Королев[54]断言：(I)，(II)，(III)，(IV)⟹(3.4) 定义的向量场在 ∂V 指向 $\mathrm{Int}(V)$，并存在同胚映射 $\mathscr{A}: \Pi \to \Pi$，$\mathscr{A}$ 是由(3.4)的轨道所定义，而 $\Pi = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_2 = 0\} \cap V$. 然后，Королев 再对系统(3.4)附加一个条件(很繁)，以保证上述之 $\mathscr{A}$ 是收缩映射，从而为运用 Banach 不动点定理铺平道路．不过，上述断言是错误的．有一反例(李炳熙 [32])：

考虑三维动力系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - x_2 + x_1x_3, \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_2x_3, \\ \dot{x}_3 = F_3(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_3. \end{cases}$$

选取 $x_3^* = 0$，$K: x_1^2 + x_2^2 \leqslant a^2 (a > 0)$，易见上述条件(I)，(II)，(III)，(IV)皆满足，但是此系统的向量场在 ∂V 上不是都指向 $\mathrm{Int}(V)$；事实上，

$$(F_1, F_2, F_3)\cdot(x_1, x_2, 0) = a^2(x_3 - 1)\begin{cases} >0, & \text{当 } x_3 > 1, \\ =0, & \text{当 } x_3 = 1, \\ <0, & \text{当 } x_3 < 1, \end{cases}$$

$\forall (x_1, x_2, x_3) \in S$．所以，Королев 的断言不真．此外，上述三维动力系统，除却奇点外，没有周期解．

Королев 定理 [54] 的修正形式见诸 Reissig, Sansone, Conti [26]，但条件极繁，很难应用．

3.4 Grasman 定理

在应用环区原理时，要设法寻找一个正向不变环区，这个过程有时是很困难的．对某些高维动力系统，例如描写生态系统的动力系统，较可行的方法是寻找正向不变球体．

1977 年，Grasman[55]应用映射度 (Brouwer) 的理论，沿此方向找出一组保证 $n(\geqslant 3)$ 维动力系统存在 (非奇点的) 周期轨道

的充分条件.

在陈述和证明 Grasman 定理[55]之前,让我们扼要列出有关映射度和 Poincaré-Hopf 指数的一些与本定理有关的基本事实.

设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $f\in C^1(\overline{D})$; 我们说 $x\in\overline{D}$ 是 f 的一个临界点 (critical point),如果 f 在 x 之 Jacobi 阵 $J(x)$ 满足条件: $\det J(x)=0$; 这时称 $f(x)$ 为 f 的临界值. 令

$$Z_f=\{x\in\overline{D}\,|\,\det J(x)=0\},$$

则 $f(Z_f)$ 是 f 的临界值集合. 我们有

$$f\in C^1(\overline{D}),\ p\notin f(Z_f)\Rightarrow f^{-1}(p)\text{为有限集}.$$

事实上, 因 $\overline{D}$ 紧致, 如能证明 $\{x\in\overline{D}\,|\,f(x)=p\}$ 是由孤立点组成的,则得上结果. 假设 $\{x\in\overline{D}\,|\,f(x)=p\}$ 不是由孤立点组成, 则 ∃ 序列 $\{x_n\}\subset\overline{D}$, $x_n\to x_0$, 且 $f(x_n)=p$, $\forall n$. 于是 $x_0\in\overline{D}$, $f(x_0)=p$, 而且

$$0=f(x_n)-f(x_0)=J(x_0)(x_n-x_0)+o(\|x_n-x_0\|)\qquad(n\to\infty).\tag{3.6}$$

因 $J(x_0)$ 非奇异, 故存在 $r>0$ 使得

$$\|J(x_0)u\|\geq r\|u\|,\ \forall u\in\mathbb{R}^n;\tag{3.7}$$

但是, 当 n 充分大时, (3.6)$\Rightarrow\|J(x_0)(x_n-x_0)\|<\frac{1}{2}r\|x_n-x_0\|$, 产生矛盾.

于是可定义映射 f 在 p(p 不是 f 的临界值)的映射度如下:

定义 3.4.1 设 $f\in C^1(\overline{D})$, $p\notin f(\partial D)$, $p\notin f(Z_f)$. 定义 f 在 p 相对于 D 的映射度为 $d(f, D, p)$:

$$d(f,D,p)=\sum_{x\in f^{-1}(p)}\operatorname{sgn}[\det J(x)].$$

从这定义知, 若 id 为恒同映射, 则当 $p\in D$ 时, $d(id, D, p)=1$; 当 $p\notin\overline{D}$ 时, $d(id, D, p)=0$. 另外, 如果 $f(x)\neq p$, $x\in\overline{D}$, 则 $d(f, D, p)=0$.

映射度有下列性质：

(i) $d(f, D, p)$当D固定时，分别是f, p的连续函数；(连续性)．

(ii) 设$H(t,x)=h_t(x)$是同伦映射，$p\notin h_t(\partial D)$, $\forall t\in[0,1]$，则$d(h_t, D, p)$与$t\in[0, 1]$无关；(同伦不变性)．

(iii) f, $g\in C^1(\bar{D})$, $f(x)=g(x)$, $\forall x\in\partial D$, $p\notin f(\partial D)\Rightarrow d(f, D, p)=d(g, D, p)$；(边界值依赖性)．

(iv) $\forall x\in\partial D$, 线段$[f(x), g(x)]$不含$p\Rightarrow d(f, D, p)=d(g, D, p)$；(Poincaré-Bohl 定理)．

可用映射度来引入指数(index)的定义．

定义 3.4.2 设$f\in C^1(\bar{D})$, $x_0\in D$, $f(x_0)=p$, x_0的指数$i(f, x_0, p)$就是$d(f, U, p)$，其中U是x_0在D的任一邻域，$f(x)=p$在U中有唯一解x_0．

考虑动力系统$\dot{x}=f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $f:\mathbb{R}^n\supset M\to\mathbb{R}^n$, $f\in C^1(M)$，此系统在$D^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\leqslant 1\}$仅有一奇点$x=0$，它是双曲型的，即$J(0)$之特征根均满足$\mathrm{Re}(\lambda)\neq 0$．如果$D^n$是此动力系统的正向不变集，于是$f$在$\partial D^n$不沿矢径方向指向$D^n$外部，于是有$i(f, 0, 0)=d(f, D^n, 0)=(-1)^n$．若$J(0)$有$m$个特征根具负实部，则$i(f, 0, 0)=(-1)^m$．所以$(-1)^m=(-1)^n$．特别，若$n=3$，则$m=1$或3．Grasman[55]考虑$m=n-2$这一情形．

下面的公式将在证明 Grasman 定理时用到．

设$f\in C^1(\bar{D})$, $p\notin f(\partial D)$, $f^{-1}(p)$为有限集，则

$$d(f, D, p)=\sum_{a\in f^{-1}(p)} i(f, a, p). \tag{3.8}$$

有关这方面的理论以及上述结果的证明，参见 Lloyd[56]．

现转到 Grasman 定理的讨论．

考虑$n(\geqslant 3)$维动力系统$\dot{x}=f(x)$，或

$$\dot{x}_i=f_i(x_1, \cdots, x_n),\ 1\leqslant i\leqslant n, \tag{3.9}$$

其中 $x=(x_1, \cdots, x_n)\in M\subset\mathbb{R}^n$，$M$ 紧致，$f_i\in C^1(M)$，$1\leqslant i\leqslant n$. (3.9)的解确定了一动力流 $A: \mathbb{R}^1\times M\to M$，$A: (t, x)\mapsto A(t, x)$，$A(t, A(s, x))=A(t+s, x)$，$A(0, x)=x$；若 $x_0\in M$，则 $x(t)=A(t, x_0)$为(3.9)满足 $x(0)=A(0, x_0)=x_0$ 的解.

作变换 $C: y\mapsto x$，$y\in\mathbb{R}^n$：

$$\begin{cases} x_1=y_2\cos y_1, \\ x_2=y_2\sin y_1, \\ x_i=y_i,\ 3\leqslant i\leqslant n. \end{cases} \tag{3.10}$$

把(3.9)变成

$$\dot{y}_i=g_i(y_1, \cdots, y_n), \quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{3.11}$$

注意及在作变换(3.10)时，有

$$\dot{y}_1=[\dot{x}_2\cos y_1-\dot{x}_1\sin y_1]/y_2,$$

$$\dot{y}_2=\dot{x}_1\cos y_1+\dot{x}_2\sin y_1.$$

当 $y_2=0$ 时，$\dot{x}_2\cos y_1-\dot{x}_1\sin y_1=f_2(0, 0, y_3, \cdots, y_n)\cos y_1-f_1(0, 0, y_3, \cdots, y_n)\sin y_1$，故假设 $f_i(0, 0, x_3, \cdots, x_n)=0$，$i=1, 2$，以便 $g_1(y_1, \cdots, y_n)$在 $y_2=0$ 时可用极限来定义.

令 $M^C=\{y\in\mathbb{R}^n|C(y)\in M\}$，其中 $C: y\mapsto x$ 是变换(3.10)．若 M 紧致，则集合 $\{y\in M^C|0\leqslant y_1\leqslant 2\pi\}$ 紧致；函数 g_i 皆为 y_1 的周期函数(周期为 2π)，每个 g_i 在 M^C 达其最大值及最小值.

定理 3.4(Grasman [55]) 假设

(i) 存在 $O=(0, \cdots, 0)\in\mathbb{R}^n$ 的一紧致、星形邻域 M，M 是系统(3.9)的正向不变集；

(ii) O 是 (3.9) 在 M 内的唯一奇点，它是双曲型的，而且 $J(0)=f_x(0)$ 恰有两特征根 λ 满足 $\mathrm{Re}(\lambda)>0$；

(iii) O 的稳定流形包含 $\{x\in\mathbb{R}^n|x_1=x_2=0\}\cap M$；

(iv) 系统 (3.9) 可经变换 (3.10) 化成 (3.11)，其中 $g_i\in C^1(M^C)$，且 $g_1\neq 0$ (在 M^C).

则系统(3.9)在 M 存在周期轨道.

证明　先概括叙述证明思路.

利用(i)得出星形集 $\Gamma_\varphi=\{C(y)\mid y\in M^C, y_1=\varphi\}$.

条件(iv)$\Rightarrow \dot{y}_1\geqslant k>0$ (在 M^C)$\Rightarrow \forall y\in M^C$, $\exists$ 唯一 $t(y)>0$ 使得 $(B(t(y), y))_1=y_1+2\pi$, 其中 $B(t, y)$ 为系统(3.11)所确定的动力流.

于是可定义 $F: \Gamma_\varphi\to\Gamma_\varphi$, $F: x\mapsto A(t(y), x)$, 其中

$$y\in\{M^C\mid y_1=\varphi\},\ C(y)=x.$$

在此基础上构造 Γ_φ 上的切向量场 $V: x\mapsto F(x)-x$. 故若存在 $x^*\neq 0$ 使 $V(x^*)=0(\Leftrightarrow F(x^*)=x^*)$, 则(3.9)有(非奇点)周期轨道.

上述 $x^*\neq 0$ 的存在性是用映射度理论证明的. 用条件(ii), (iii)计出 $i(V, 0, 0)=(-1)^{n-2}$, 用(i)计出 $d(V, \Gamma_\varphi, 0)=(-1)^{n-1}$. 再利用公式(3.8), 遂得 $x^*\neq 0$ 的存在性.

以下分别细述.

条件(i)$\Rightarrow M$ 星形集(即自 $O\in M$ 出发的任一半射线与 ∂M 相交于唯一的一点)$\Rightarrow \Gamma_\varphi=\{C(y)\mid y\in M^C, y_1=\varphi\}$ (是 $\mathbb{R}^n$ 中一个 $(n-1)$ 维子空间与 M 之交集)是星形的.

条件(iv)$\Rightarrow$(不失一般性, 可设在 M^C, $g_1>0$)$\exists k>0$, 使得 $g_1\geqslant k>0$ (在 M^C)$\Rightarrow \dot{y}_1\geqslant k>0$, 故(3.11)的轨道 $B(t, y)$ 有一定的旋转性, 且 y_1 是 $t\geqslant 0$ 的单调上升函数. $\forall y\in M^C$, 存在唯一的 $t(y)>0$, 使 $B(t(y), y)$ 的第一坐标 $(B(t(y), y))_1=y_1+2\pi$. 因 B 是 C^1 动力流, 故可用隐函数定理推知 $t(y)\in C^1(M^C)$.

设 $A(t, x)$ 为(3.9)所确定的动力流. 定义映射 $F: x\mapsto A(t(y), x)$, $y\in\{M^C\mid y_1=\varphi\}$, $C(y)=x$. 故 $F: \Gamma_\varphi\to\Gamma_\varphi$, 而且 $F\in C^1(\Gamma_\varphi, \Gamma_\varphi)$.

令 $V: x\mapsto F(x)-x$, $\forall x\in\Gamma_\varphi$, 因 $F: \Gamma_\varphi\to\Gamma_\varphi$, 故 V 是 Γ_φ 上的切向量场. 换言之, $V(x)=F(x)-x$, $\forall x\in\Gamma_\varphi$. 显然, $V(0)=0$. 注意及 $V(x^*)=0\Leftrightarrow F(x^*)=x^*\Leftrightarrow A(t(y), x^*)=x^*$. 如 $x^*\neq 0$,

则 x^* 便是(3.9)的(非奇点)周期轨道. 如能证实这种 x^* 的存在性,则定理得证.

现来证明 x^* 的存在性.

若 $\exists x^* \in \partial\Gamma_\varphi$, $V(x^*)=0$, 则定理得证.

若 $V(x)\neq 0$, $\forall x\in\partial\Gamma_\varphi$, 则因 Γ_φ 为星形, M 为 (3.9) 的正向不变集, 故 $V(x)$ 在 $\partial\Gamma_\varphi$ 不沿向径指向 Γ_φ 外部. 所以由映射度理论得出 $d(V, \Gamma_\varphi, 0)=(-1)^{n-1}$.

由公式(3.8)得

$$d(V, \Gamma_\varphi, 0)=\sum_{a\in V^{-1}(0)} i(V, a, 0)$$

$$=i(V, 0, 0)+i(V, x^*, 0)+\cdots.$$

以下证明 $i(V,0,0)=(-1)^{n-2}$, 从而得出: 存在 $x^*\neq 0, V(x^*)=0$.

注意及 0 是 $V(x)=0$ 的一个孤立解, 故按指数定义 3.4.2 知,

$$i(V, 0, 0)=d(V, U, 0)=\mathrm{sgn}(\det V_x(0))=\mathrm{sgn}\left(\prod_{i=1}^{n}\sigma_i\right),$$

其中 $V_x(0)$ 是 $V(x)$ 在 $x=0$ 的 Jacobi 阵, σ_i 是 $V_x(0)$ 的特征根. 为了计算 $i(V, 0, 0)$, 只需弄清 σ_i 的性质.

令 $F_x(0)$ 为 F 在 $x=0$ 处的 Jacobi 阵, 令 $t_0=t(y)$, 则

$$V_x(0)=F_x(0)-I$$

$$=\frac{\partial A}{\partial x}(t_0, 0)+\frac{\partial A}{\partial t}(t_0, 0)\cdot\frac{\partial t}{\partial x}(0)-I$$

$$=\frac{\partial A}{\partial x}(t_0, 0)-I,$$

因为 $\partial A(s, 0)/\partial t\equiv 0$. 按 Coddington 及 Levinson[4, p. 25], $\partial A(t_0, 0)/\partial x$ 是下列矩阵微分方程初值问题的解:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial A}{\partial x}(t, x)\right]=f_x(A(t, x))\cdot\dfrac{\partial A}{\partial x}(t, x),\\ \dfrac{\partial A}{\partial x}(0, x)=I.\end{cases}$$

因 $f(0)=0$, 故 $f_x(A(t, 0))=f_x(0)$; 令 $J=f_x(0)$, 有

$$\frac{\partial A}{\partial x}(t,\ 0)=\exp(Jt);$$

所以 $F_x(0)=\dfrac{\partial A}{\partial x}(t_0,\ 0)=\exp(Jt_0)$; $V_x(0)=\exp(Jt_0)-I$. 以下证明 $t_0=2\pi/b$, 其中 $b=\mathrm{Im}(\lambda)$, λ 为 J 的特征根, $\mathrm{Re}(\lambda)>0$.

事实上, 假设 (iii) $\Rightarrow f_i(0,\ 0,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)=0,\ i=1,\ 2\Rightarrow$ $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(0)=\dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(0)=0,\ 3\leqslant j\leqslant n$. 引入记号 $f_{ij}=\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)$, 则 J 呈下形:

$$J=\begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ J_1 & J_2 \end{bmatrix},\quad J_0=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $0\in\mathbb{R}^{2\times(n-2)}$ 为零阵, $J_1\in\mathbb{R}^{(n-2)\times 2}$, $J_2\in\mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$. J 的特征根是 J_0 的特征根连同 J_2 的特征根.

J_0 的特征根由下列方程决定:

$$0=\det(\lambda I-J_0)=\lambda^2-(f_{11}+f_{22})\lambda+(f_{11}f_{22}-f_{12}f_{21}),$$

其判别式 $(f_{22}-f_{11})^2+4f_{12}f_{21}<0$. 因为它也是

$$\begin{aligned}0&\neq g_1(y_1,\ 0,\ \cdots,\ 0)\\&=\cos^2 y_1[f_{21}+(f_{22}-f_{11})\tan y_1-f_{12}\tan^2 y_1]\end{aligned}$$

右方 $\tan y_1$ 的二次型的判别式. 因此, J_0 的两特征根为 $(f_{11}+f_{22})/2\pm ib$, 其中 $b=(-4f_{12}f_{21}-(f_{11}-f_{22})^2)^{1/2}/2$.

若 $y(t)$ 是系统(3.11)满足初值条件 $y(0)=0$ 的解, 则 $y_i(t)=0,\ i=2,\ \cdots,\ n$, 而 $y_1(t)$ 满足方程

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t)=&f_{21}\cos^2(y_1(t))+(f_{22}-f_{11})\cos(y_1(t))\sin(y_1(t))\\&-f_{12}\sin^2(y_1(t)).\end{aligned}$$

此方程之解满足关系

$$\tan(y_1(t))=K_1\tan(tb+K_2)+K_3,$$

其中 $K_i,\ 1\leqslant i\leqslant 3$ 为适当选取的常数. 因 $y_1(0)=0,\ y_1(2\pi/b)=2\pi$, 故 $t_0=2\pi/b$.

继续讨论 $V_x(0)$ 的特征根.

若 λ 是 J 的特征根且 $\mathrm{Re}(\lambda)>0$, 则 λ 必是 J_0 的特征根. 事实上,若不然, λ 便是 J_2 的特征根, 但是属于 J_2 的 J 的特征根对应的特征向量 $v=(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 满足 $v_1=v_2=0$, 从而 v 处在 (3.9) 的稳定流形上 (由假设 (iii)), 从而 $\mathrm{Re}(\lambda)<0$, 矛盾. 因 $\mathrm{Im}(\lambda t_0)=2\pi$, 故 $\exp(\lambda t_0)-1$ 是 $V_x(0)$ 的正特征根(实).

若 μ 是 J_2 的特征根, 则 $\exp(\mu t_0)-1$ 是 $V_x(0)$ 的具负实部的特征根(由假设(ii)).

所以, $V_x(0)$ 有两个 $\sigma_i>0$, $(n-2)$ 个 σ_i 具性质 $\mathrm{Re}(\sigma_i)<0$, 从而 $i(V, 0, 0)=(-1)^{n-2}$. ∎

此定理可用来讨论下列生态系统(参见 R. M. May and W. J. Leonard [138])的周期轨道存在性:

$$\begin{cases} \dot{N}_1=N_1(1-N_1-\alpha N_2-\beta N_3)+\varepsilon, \\ \dot{N}_2=N_2(1-\beta N_1-N_2-\alpha N_3)+\varepsilon, \\ \dot{N}_3=N_3(1-\alpha N_1-\beta N_2-N_3)+\varepsilon, \end{cases} \tag{3.12}$$

其中 $0<\beta<1<\alpha$, $\alpha+\beta>2$, $0<\varepsilon\ll 1$.

3.5 Poincaré 映射的不动点

考虑动力系统 (1.1) 所确定的动力流 $g^t: x\mapsto g(t, x)$. 设 γ 是(1.1)的周期轨道, $m\in\gamma$. S 是 $\mathbb{R}^n$ 的$(n-1)$维子空间的一个开集, $m\in S$, γ 与 S 不相切. 若 $\tau>0$ 是 γ 的周期,则当 t 增大并超过 τ 时, $g(t, m)$ 在 m 穿过 S. 如 x 与 m 充分接近, 则存在 $\delta(x)$ (近似于 τ), 使 $g(\delta(x), x)$ 穿过 S. 于是得到映射

$$P: U\to S,$$
$$P(x)=g(\delta(x), x).$$

U 是 m 的一邻域. 事实上,的确存在这样的 U 及唯一的 C^1 映射 $\delta: U\to\mathbb{R}^1$, 使得 $g(\delta(x), x)\in S$, $\forall x\in U$, 而且 $\delta(m)=\tau$ (参考 Hirsch & Smale[7, Chap. 11, 13], Hartman [6, p. 251]). 令 $S_0=S\cap U$, 定义 C^1 映射 $P: S_0\to S$ 为

$$P(x)=g(\delta(x),\ x),$$

显然 $P(m)=m$. 称 P 为 Poincaré 映射，其不动点对应于 (1.1) 的周期轨道，参考图 7.

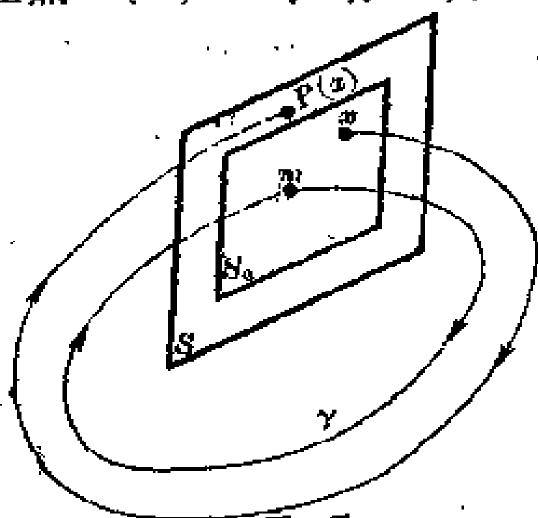


图 7

利用 Poincaré 映射，可以研究系统 (1.1) 的周期轨道的存在性(在某些情况，此方法还成功地用来研究周期轨道的稳定性，例如 Robbins[57]).

Брушлинская[61] 研究了下列动力系统：

$$\dot{x}=A(\varepsilon)x+Q(x,\ \varepsilon), \tag{3.13}$$

其中 $x\in R^n$, Q 充分光滑，而

$$A(\varepsilon)=\left[\begin{array}{cc|c} a(\varepsilon) & -b(\varepsilon) & \\ b(\varepsilon) & a(\varepsilon) & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & C(\varepsilon)\end{array}\right],$$

$a(0)=0$, $a'(0)>0$, $b(0)>0$, $C(\varepsilon)\in R^{(n-2)\times(n-2)}$, $C(0)$的一切特征根皆具负实部. [61]用 Poincaré 映射证明下列定理：

定理 3.5(Брушлинская[61]) 存在原点的某邻域 U(与 ε 无关)，使当 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0>0$, 系统 (3.13) 在 U 存在唯一周期轨道，它是稳定的极限环. 存在二维不变流形 M_ε^2, 它包含原点及该极限环. M_ε^2 上被周期轨道所围区域内之一切轨道，当 $t\to\infty$ 时，趋于极限环，当 $t\to-\infty$ 时，趋于原点. 当 $t\to-\infty$ 时趋于原点的所有轨道构成一个 $(n-2)$ 维流形 M_ε^{n-2}. 任一自 $U\backslash M_\varepsilon^{n-2}$ 出发的轨道在 $t\to\infty$ 时趋于极限环.

Poincaré 映射还可用来研究三体问题的闭轨道存在性，例如«Moser 闭轨道定理»(参见 Abraham and Marsden[62, Theorem 36.7]). 此外，以 Poincaré 映射为工具研究周期轨道的文献还

有：Glass & Pasternack [59]，Faymye[60]，Fuller[139]，Mallet-Paret & Yorke[140]，等等.

3.6 一个古典的 Poincaré 定理的推广

考虑二维动力系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_2 + f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = -ax_1 + f_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{3.14}$$

其中 $f_i(x_1, x_2)$，$i=1, 2$ 为高次项. 此系统不一定有周期解. 例如，二次多项式系统

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1^2 + x_1x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1,$$

没有(非常数)周期解(参考叶彦谦[2]).

一个古典的定理(Poincaré[63])表明如果 f_1, f_2 满足对称性条件

$$f_1(x_1, -x_2) = -f_1(x_1, x_2),$$
$$f_2(x_1, -x_2) = f_2(x_1, x_2),$$

则 (3.14) 在原点邻域存在周期解 (其周期接近于 $2\pi/|a|$). Podalak & Westreich[64]研究了这个定理的推广，考虑类似的 n 维动力系统

$$\dot{x} = Ax + f(x), \tag{3.15}$$

其中 $\|f(x)\| = o(\|x\|)$(在 $x=0$ 邻域)，并证明如果非线性项满足类似的对称性条件，则系统(3.15)存在周期轨道.

处理的方法是把问题转化为分枝点问题，然后证明分枝点存在.

现来描述 Polálak-Westreich 的定理及其证明.

先作一般性的介绍和引入若干定义.

考虑 $\mathbb{R}^{2k}$ 上的动力系统

$$\dot{x}=Ax+f(x),$$

其中常阵 A 呈下形：

$$A=\begin{bmatrix}0 & A_1\\ A_2 & 0\end{bmatrix},$$

$A_1, A_2\in\mathbb{R}^{k\times k}$, $\det A_2\neq 0$. 假设 A 有特征根 $\pm i$, 并可能有 $\pm iN$ 型(N 为正整数) 的特征根. (如 A 有形如 $\pm\alpha i$ 的特征根, 只要作变换 $s=t/\alpha$, 可把系统化为上述情形.) 于是上述系统可改写为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=A_1x_2+f_1(x_1, x_2),\\ \dot{x}_2=A_2x_1+f_2(x_1, x_2),\end{cases}\tag{3.16}$$

其中 $x_1, x_2\in\mathbb{R}^k$, $f=(f_1, f_2)$, $\|f(x)\|=o(\|x\|)$, $f_i:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$, 满足对称性条件：

$$\begin{aligned}f_1(x_1, -x_2)&=-f_1(x_1, x_2);\\ f_2(x_1, -x_2)&=f_2(x_1, x_2);\end{aligned}\tag{3.17}$$

设过每点 $c\in\mathbb{R}^{2k}$,(3.16)存在唯一解,记此解为 $x(t,c)$,$x(0,c)=c$, 它在 t 的某区间上有定义. 特别地, 因 $x(t, 0)=0$, $\forall t\in\mathbb{R}^1$, 故存在原点的某邻域 U, 使当 $c\in U$ 时, $x(t, c)$ 之定义域 $(-\Delta, \Delta)\supset[-2\pi, 2\pi]$(参考 Coddington & Levinson[4, p. 22])。于是有

引理 1([64]) 若上述条件成立而且 $c=(c_1, 0)\in\mathbb{R}^{2k}$, $c_1\in\mathbb{R}^k$, 则当表示 $x(t, c)$为$(x_1(t, c), x_2(t, c))$时, $x_1(t, c)$ 是 t 的偶函数, $x_2(t, c)$ 是 t 的奇函数; 而且当 $\|c_1\|$ 充分小时, $(c_1, 0)$ 是(3.16)的常数解 $\Leftrightarrow c_1=0$.

证明 对称性条件 (3.17) 保证了: 若 $x(t, c)=(x_1(t, c), x_2(t, c))$是(3.16)通过 $c=(c_1, 0)$的解, 则 $y(t, c)=(x_1(-t, c), -x_2(-t, c))$ 也是. 由解的唯一性, 可得 $x(t, c)=y(t, c)$, 从而 $x_1(t, c)$ 是 t 的偶函数, $x_2(t, c)$ 是 t 的奇函数. 至于引理的第二个结论, 只要注意及: 若$(c_1, 0)$是(3.16)的常数解, 则 c_1 满足

$$A_2c_1+f_2(c_1, 0)=0;$$

但 $\det A_2\neq 0$, f_2 是高次项, 所以当 $\|c_1\|$ 充分小时, $c_1=0$ 是上述方程的唯一解. ∎

定义 设 σ 是 A 的特征根, 记 σ 的代数重数为 $\mathrm{mult}(\sigma, A)$, 若 σ 不是 A 的特征根, 则令 $\mathrm{mult}(\sigma, A)=0$. 定义特征根 $+i$ 的总重数为 $\sum_{k=1}^{m}\mathrm{mult}(iN_k, A)$, 其中 $N_1=1$, 而 $+iN_2, \cdots, +iN_m$ 是 A 的形如 $+iN$ (N 为正整数, $N>1$) 的特征根的全体.

对于系统(3.16), 有下述结果:

定理 3.6(Polalak-Westreich[64]) 设 A 的特征根 $+i$ 的总重数为奇数, 则 $\forall\delta>0$, $\exists r_0>0$, 使得 $\forall r\in(0, r_0)$, (3.16) 存在非常数解 $x(t, c)$, $\|c\|=r$, 而且 $x(t, c)$ 是以 $(2\pi+\lambda)$ 为周期的周期解($|\lambda|<\delta$). 另外, 在

$$x(t, c)=(x_1(t, c), x_2(t, c))$$

中, $x_1(t, c)$ 是 t 的偶函数, $x_2(t, c)$ 是 t 的奇函数.

证明 利用常数变易公式 (Coddington & Levinson[4, p. 75]), 可知(3.16)的解 $x(t, c)$ 满足

$$x(t, c)=\exp(tA)c+\int_0^t[\exp(t-s)A]f(x(s, c))ds.$$

于是, $x(t, c)$ 是以 $(2\pi+\lambda)$ 为周期的周期解 $\Leftrightarrow c$ 满足

$$x(2\pi+\lambda, c)-c=0. \tag{3.18}$$

为了证明定理的第一部分, 我们证明(3.18)在 $(0, 0)$ 邻域存在一族解 (c, λ), 换言之, $(c, \lambda)=(0, 0)$ 是(3.18)的分枝点. (分枝点定义参见 Nirenberg [141, Chap. III].) 可以利用对称性条件(3.17)来达到此目的. 现来寻求(3.18)形如 $(c_1, 0)$ 的解. 由引理 1 知, 在原点的某邻域, 这样的解不会是常数解. 另外, 由下述引理 2 (证明放后)知, 仅需考虑(3.18)的奇分量即可.

引理 2 设 $\bar{c}=(c_1, 0)$ 是

$$x_2(\lambda/2+\pi, \bar{c})=0$$

的解，则 $\bar{c}$ 是(3.18)的解。

于是，转向寻求

$$x_2(\lambda/2+\pi,\ c_1)=0 \tag{3.19}$$

的解 $(c_1,\ \lambda)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^1$.

为此，要利用下述引理 3（证明推后）.

引理 3　设 $F(x,\ \lambda)$ 是连续映射，$F:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^k$，而且

$$F(x,\ \lambda)=T(\lambda)x+g(x,\ \lambda),$$

其中 g 是高次项(在 $x=0$ 邻域)．如果对某 $\lambda_0\in\mathbb{R}^1$，有

$$\operatorname{sgn}[\det T(\lambda_0+\delta)]\neq\operatorname{sgn}[\det T(\lambda_0-\delta)],\ \delta>0,$$

则 $(0,\ \lambda_0)$ 是 $F(x,\ \lambda)=0$ 的分枝点。

为了对(3.19)应用引理 3，令

$$F(c_1,\ \lambda)=x_2(\lambda+\pi,\ c_1),$$

由常数变易公式，得

$$F(c_1,\ \lambda)=\Big([\exp(\pi+\lambda)A]\bar{c})_2$$
$$+\int_0^{\pi+\lambda}[\exp(\pi+\lambda-s)A]f(x(s,\ \bar{c}))ds\Big)_2,$$

其中 $(\cdot)_2$ 表示向量 $(\cdot)$ 的后 k 个分量．把 $\exp(tA)$ 分为 $k\times k$ 的子块：

$$\exp(tA)=\begin{bmatrix} h_1(t,\ A) & h_2(t,\ A)\\ h_3(t,\ A) & h_4(t,\ A)\end{bmatrix}.$$

因 $\bar{c}=(c_1,\ 0)$，故 $[\exp(tA)]\bar{c}=[h_1(t,\ A)c_1,\ h_3(t,\ A)c_1]$；又因 f 在 $\bar{c}=0$ 邻域是高次项，所以

$$F(c_1,\ \lambda)=h_3(\pi+\lambda,\ A)c_1+g(c_1,\ \lambda),$$

其中 g 在 $c_1=0$ 邻域是高次项.

把 $\exp A$ 展开为级数，并注意及

$$A=\begin{bmatrix} 0 & A_1\\ A_2 & 0\end{bmatrix},$$

可得

$$h_3(\pi+\lambda,\ A)$$
$$=\left[(\pi+\lambda)I+\frac{(\pi+\lambda)^3}{3!}(A_2A_1)+\frac{(\pi+\lambda)^5}{5!}(A_2A_1)^2+\cdots\right]A_2. \tag{3.20}$$

把上式右方记为 $h(\pi+\lambda,\ A)A_2$。对照引理 3, 以下拟证明在 λ 经过 0 时, $\det[h_3(\pi+\lambda,\ A)]$ 变号. 这等价于在 λ 经过 0 时, $\det[h(\pi+\lambda,\ A)]$ 变号(因 $\det A_2\neq 0$)。

$h(\pi+\lambda,\ A)$ 的特征根可由 A_2A_1 的特征根计算出来, 事实上, 有

引理 4 设 σ 是 A_2A_1 的一个特征根, 其对应的特征向量为 v, 则 $[\sin i(\pi+\lambda)\sqrt{\sigma}\,]/i\sqrt{\sigma}$ 是 $h(\pi+\lambda,\ A)$ 的特征根, 其特征向量是 v.

因此,

$$\det[h(\pi+\lambda,\ A)]=\prod_{\sigma}\left[\frac{\sin i(\pi+\lambda)\sqrt{\sigma}}{i\sqrt{\sigma}}\right]^{\mathrm{mult}(\sigma,\ A_2A_1)}.$$

由此可得, 当 λ 经过 0 时,

$$\det[h(\pi+\lambda,\ A]\text{变号}\Leftrightarrow\sum_{\lambda=1}^{J}\mathrm{mult}(-N^2,\ A_2A_1)\text{为奇数},$$

其中 $\sum\limits_{h=1}^{J}$ 是对 A_2A_1 所有形如 $-N^2$ (N 为正整数) 的特征根求和.

此外, 还有

引理 5 $\mathrm{mult}(-N^2,\ A_2A_1)=\mathrm{mult}(iN,\ A)$.

于是, 当 λ 经过 0 时,

$\det[h(\pi+\lambda,\ A)]$ 变号 $\Leftrightarrow A$ 的特征根 $+i$ 的总重数为奇数.

于是, 由上述 (引理 2, 引理 3, 引理 4, 引理 5), 可得定理 3.6 的第一部分; 由引理 1, 可得第二部分. ∎

现在补证引理 2～ 引理 5.

引理 2 的证明 由引理 1 知, 过 $\bar{c}=(c_1,\ 0)$ 的解

$$x(t,\ \bar{c})=(x_1(t,\ \bar{c}),\ x_2(t,\ \bar{c}))$$

中的 x_1 为 t 的偶函数，x_2 为 t 的奇函数，所以

$$x_1(-\lambda/2-\pi,\ \bar{c})=x_1(\lambda/2+\pi,\ \bar{c}),$$
$$x_2(-\lambda/2-\pi,\ \bar{c})=-x_2(\lambda/2+\pi,\ \bar{c}).$$

如果 $x_2(\lambda/2+\pi,\ \bar{c})=0$，则

$$x_i(-\lambda/2-\pi,\ \bar{c})=x_i(\lambda/2+\pi,\ \bar{c}),\quad i=1,\ 2,$$

从而通过 $\bar{c}$ 的解是以 $(2\pi+\lambda)$ 为周期的周期解。 ∎

引理 3 的证明 按 Nirenberg[141, 第 III 章]，$(0,\ \lambda_0)$ 称为 $F(x,\ \lambda)=0$ 的分枝点，如果对 $(0,\ \lambda_0)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^1$ 的每一邻域，都存在 $F(x,\ \lambda)=0$ 的解 $(x,\ \lambda)$，其中 $x\neq 0$。

假设 $(0,\ \lambda_0)$ 不是 $F(x,\ \lambda)=0$ 的分枝点．于是，对于充分小的 $\varepsilon>0$，任一固定的 λ，$|\lambda-\lambda_0|$ 充分小，$d(F(x,\ \lambda),\ \|x\|\leqslant\varepsilon,0)$ 有定义，而且与 λ 无关．但是，由映射度定义知

$$\begin{aligned}&d(F(x,\ \lambda),\ \|x\|\leqslant\varepsilon,\ 0)\\&=\operatorname{sgn}\left[\det\frac{\partial F}{\partial x}(0,\ \lambda)\right]=\operatorname{sgn}[\det T(\lambda)],\end{aligned}$$

所以，

$$\operatorname{sgn}[\det T(\lambda_0-\delta)]=\operatorname{sgn}[\det T(\lambda_0+\delta)],$$

与假设

$$\operatorname{sgn}[\det T(\lambda_0-\delta)]\neq\operatorname{sgn}[\det T(\lambda_0+\delta)]$$

相矛盾． ∎

引理 4 的证明 由 (3.20) 及 Гантмахер[142] 关于矩阵函数的有关公式：

$$(\sqrt{M})^{-1}\sin(\sqrt{M}\,t)=tI-\frac{t^3}{3!}M+\frac{t^5}{5!}M^2+\cdots,$$

可得

$$\begin{aligned}h(\pi+\lambda,\ A)=(\pi+\lambda)I&-\frac{(\pi+\lambda)^3}{3!}(i\sqrt{A_2A_1})^2\\&+\frac{(\pi+\lambda)^5}{5!}(i\sqrt{A_2A_1})^4+\cdots\end{aligned}$$

$$= (i\sqrt{A_2A_1})^{-1}\sin[i(\pi+\lambda)\sqrt{A_2A_1}],$$

所以，若 σ 是 A_2A_1 的特征根，则 $[\sin i(\pi+\lambda)\sqrt{\sigma}]/i\sqrt{\sigma}$ 是 $h(\pi+\lambda, A)$ 的特征根，等等. ∎

引理 5 的证明 对于任一具有纯虚数特征根 iN 的阵 A，有下列关系成立：

$$\mathrm{mult}(iN, A)+\mathrm{mult}(-iN, A)=\mathrm{mult}(-N^2, A^2). \tag{3.21}$$

目前，

$$A=\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2=\begin{bmatrix} A_1A_2 & 0 \\ 0 & A_2A_1 \end{bmatrix},$$

而且

$$\mathrm{mult}(-N^2, A_2A_1)=\mathrm{mult}(-N^2, A_1A_2).$$

又因 $A\in\mathbb{R}^{2k\times 2k}$ 为实阵，所以

$$\mathrm{mult}(iN, A)=\mathrm{mult}(-iN, A).$$

把这些式子代入(3.21)，得

$$2\,\mathrm{mult}(iN, A)=2\,\mathrm{mult}(-N^2, A_2A_1),$$

即得所求公式. ∎

[注] 1982 年 11 月《数学学报》发表了胡虎翼、周庆善、钱敏的一篇文章 [213]. 他们用映射的 Brouwer 度研究了可逆系统的周期解，推广了 Lazer[214] 等人的工作，这也是二维可逆系统中心问题在高维空间的推广.

3.7 Ляпунов 定理及其推广

本节对著名的 Ляпунов 定理 [65] 及其近期的推广作一扼要综述.

考虑动力系统

$$\dot{x}=Ax+f(x), \tag{3.22}$$

其中阵 A 有纯虚数特征根 $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \cdots, \pm\alpha_n$，$f$ 为解析，最低

次项为二次. Ляпунов[65]证明了

定理 3.7(Ляпунов[65]) 设 $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$, …, $\pm\alpha_n$ 是 A 的特征根(纯虚数), α_k/α_1 不是整数, $k=2$, …, n, 又设(3.22)具有首次积分, 其 Hesse 阵满秩. 则存在单参族周期解, 其周期近似于 $2\pi i/\alpha_1$. 若 $\alpha_k/\alpha_l\neq$ 整数, $k\neq l$, 则存在 n 族这种周期解.

这里有一问题: 若 α_k/α_l 为整数, 情况如何? Ляпунов 的明证(涉及构造一级数), 在此情形行不通. 约十年前, Roels[66], [67] 证明了: 如果比值 $\alpha_k/\alpha_l\geq 3$, 则 Ляпунов 所用的级数可以补救. 此后不久, Schmidt 及 Sweet[68] 运用 Hale[69]所创的分枝理论给 Roels 的结果以新的证明而且对比值为 1 及 2 的情形得到一些结果.

另一问题是: 如果 A 有两个特征根为 0 (其初等因子非单), 情况又如何? Плисс[70]在附加条件(如果系统有一特殊类型的解析积分)之下, 证明了系统亦存在一族周期解. 一般而言, 此族周期解不一定是解析的.

Нустров[71]把 Ляпунов 定理推广到下列实系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_j=X_j(x_1,\ \cdots,\ x_l;\ y,\ z;\ v_1,\ \cdots,\ v_m),\\ \dot{y}=-\lambda z+Y(x_1,\ \cdots,\ x_l;\ y,\ z;\ v_1,\ \cdots,\ v_m),\\ \dot{z}=\lambda y+Z(x_1,\ \cdots,\ x_l;\ y,\ z;\ v_1,\ \cdots,\ v_m),\\ \dot{v}_i=b_{i1}v_1+\cdots+b_{im}v_m+V_i(x_1,\ \cdots,\ x_l;\ y,\ z;\ v_1,\ \cdots,\ v_m),\end{cases}$$

$$j=1,\ \cdots,\ l;\ i=1,\ \cdots,\ m, \tag{3.23}$$

其中 X_j, Y, Z, V_i 是非线性的解析函数, 矩阵(b_{jk})的特征根不是 $\pm\lambda i$ 的整数倍, 又设(3.23)有形如

$$M=y^2+z^2+L_1(x_1,\ \cdots,\ x_l)+L_2(v_1,\ \cdots,\ v_m)$$

$$+S(x_1,\ \cdots,\ x_l;\ y,\ z;\ v_1,\ \cdots,\ v_m)$$

的首次积分, 这里 L_i 是二次型, $i=1$, 2; S 的项的次数大于等于 3. 此结果可应用来研究一种陀螺仪的运动 (balanced gyroscope

in a Cardan suspension).

Красносельский[72] 把 Ляпунов 定理推广到下列系统：

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}+\omega^2 g_i(x_1, \cdots, x_n)=0, \quad i=1, \cdots, n.$$

Пляcc[73]给出下列系统存在一族对称周期解的条件：

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}+\lambda_i^2 x_i=g_i(x_1, \cdots, x_n), \quad i=1, \cdots, n,$$

其中 $\lambda_i>0, \forall i$, g_i 为二次以上的解析函数，$\forall i$. Пасынкова[74]推广了这些结果.

Berger[75] 得到 Ляпунов 定理的若干推广，其办法是把系统

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mathrm{grad}\, U=0$$

(其中 $x\in\mathbb{R}^n$, $U:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$, U 为 C^1 偶函数，$\mathrm{grad}\, U(0)=0$) 的周期解转化为变分法中一个等周问题的临界点(critical point).

1973, Weinstein[76, 77] 就下列 Hamilton 系统给出两个极其深刻和精采的、周期解存在性定理：

$$\dot{z}=JH_z, \ z=(z_1, \cdots, z_{2n})^T, \ J=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

他研究了流形 M 上的 Hamilton 向量场(具有一个全由周期轨道组成的子流形)的 C^1 扰动. 在微小的扰动下，一般只能保持有限个周期轨道继续存在. Weinstein 把决定幸存的周期轨道的最小个数的问题，归结为对两个闭的 Lagrange 流形之交集的研究，而后一问题又归结为估计某轨道流形上的奇点个数，从而得到

定理 3.8 (Weinstein) 设 $H\in C^2$ (在 $z=0$ 邻域) 且其 Hesse 阵为正定阵，则对充分小之 ε，任一能量曲面

$$H(z)=H(0)+\varepsilon^2$$

上至少存在(3.24)的 n 个周期轨道，其周期接近于线性化系统之周期轨道的周期.

其后，Moser[78]在1976给出上述定理的另一证明。

1978，Rabinowitz[79]研究了下列Hamilton系统的周期解存在性：

$$\frac{dp}{dt}=-H_q,\ \frac{dq}{dt}=H_p, \tag{3.25}$$

其中 $H\in C^1(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^1)$，$p,q\in\mathbb{R}^n$，$z=(p,q)$。他首先得到关于(3.25)具指定能量的周期解的存在性定理：

定理3.9(Rabinowitz) 设 $H^{-1}(b)$ 对某 $b\neq0$ 与 S^{2n-1} 径向地同胚(即 $H^{-1}(b)$ 对于原点是适当地星形的)，$\langle\zeta,H_z(\zeta)\rangle_{\mathbb{R}^{2n}}\neq0$，$\zeta\in H^{-1}(b)$ (这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$ 表示 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的内积)，则(3.25)在 $H^{-1}(b)$ 上存在周期解。

其次，他得到关于上述系统存在指定周期的周期解的结果：

定理3.10(Rabinowitz) 设 (i) $H(z)=o(\|z\|^2)$ (在 $z=0$ 邻域)；(ii) 对 $\|z\|\geq\bar{r}$，$\theta\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，有 $H\geq0$ 及 $0<H(z)\leq\theta\langle z,H_z\rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$。则 $\forall T>0$，(3.25)存在周期为 T 的周期解。

这两定理的证明以及关于Seifert, Berger, Gordon, Clark, Weinstein, Moser, Chow, Mallet-Paret等人的有关工作的扼要评论，参见[79]。

有关Hamilton系统的周期轨道问题，还有较全面的综述文章：Rabinowitz[143]。此外，还可参考：邓诗涛[217]。

3.8 Sinai-Vul定理

Sinai, Vul[96]推导出一个准则，借助计算机，可用此准则发现动力系统(1.1)的周期轨道。他们应用此结果证明了Lorenz方程(Lorenz[144])在某种条件下(Rayleigh数 $r=28$，Prandt数 $\sigma=6$，及参数 $b=8/3$)存在周期轨道。

考虑动力系统

$$\dot{x}=F(x), \tag{3.26}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$, $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $F\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 设此系统的解 $x(t)=g(t, x^{(0)})$, $g(0, x^{(0)})=x^{(0)}$ 对一切 $t\in\mathbb{R}^1$ 存在. 因此, (3.26) 决定了一个单参数微分同胚群 $\{g^t\}$, 这里 $g^t:x\mapsto g(t, x)$. 取模

$$\|x\|=\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]^{1/2}.$$

若 $a\in\mathbb{R}^1$ 为固定常数, 则

$$\Pi=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,x_n=a\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的超平面. 任取初始点 $x^{(0)}\in\Pi$. 假设, 对某 $T>0$, $g(T, x^{(0)})=x^{(1)}\in\Pi$. 令 $\varepsilon=\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$. 在 $x^{(0)}$ 的某充分小邻域 $U\subset\Pi$, 可定义 Poincaré 映射 $P\in C^\infty(U)$, $P(x^{(0)})=x^{(1)}$.

在 $x^{(0)}$ 的邻域把 P 展为 Taylor 级数, 令

$$y=x-x^{(0)},\ Q(y)=P(x)-x^{(0)},\ x\in U\subset\Pi.$$

并改写 Q 为下形:

$$Q(y)=y^{(0)}+Ly+Q_1(y),$$

其中 $y^{(0)}=x^{(1)}-x^{(0)}$, L 为 Q 在 $y=0$ 邻域的线性部分的矩阵, Q_1 是非线性项. 又设映射 Q_1 满足下列条件:

$\exists\rho_0>0$, $K_0>0$, 使得

$$\left.\begin{aligned}&\|Q_1(y')-Q_1(y'')\|\leqslant K_0\rho\|y'-y''\|,\\&\forall\rho\leqslant\rho_0,\ \|y'\|\leqslant\rho,\ \|y''\|\leqslant\rho.\end{aligned}\right\} \tag{*}$$

定理 3.11 (Sinai-Vul) 设 $\|y^{(0)}\|=\varepsilon$, 对某 $\bar{\rho}_0\in(0, \rho_0]$, 有

$$\|(L-E)^{-1}\|(\varepsilon/\bar{\rho}_0+K_0\bar{\rho}_0)\leqslant 1,$$

则在 $x^{(0)}$ 的 $\bar{\rho}_0$ 邻域 $\left(指\ U_{\bar{\rho}_0}(x^{(0)})=\left\{x\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_i^{(0)})^2<\bar{\rho}_0^2,\ |x_n-a|<\bar{\rho}_0\right\}\right)$ 内存在 Q 的唯一不动点 (这对应于系统 (3.26) 的周期轨道).

证明 证明主要利用 Newton 方法 (参考 Ortega & Rheinboldt[1,22]).

令 $G(y)=Q(y)-y$, $L_1=L-E$, 故 Q 之不动点即方程

$$G(y)=0$$

的解. 用逐次逼近法求解. 令 $y_0=0$, 及

$$y_{k+1}=y_k-L_1^{-1}(G(y_k)).$$

于是,

$$\begin{aligned}y_{k+1}&=y_k-L_1^{-1}(Q(y_k)-y_k)\\&=y_k-L_1^{-1}(y^{(0)}+Ly_k-y_k+Q_1(y_k))\\&=-L_1^{-1}y^{(0)}-L_1^{-1}Q_1(y_k).\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\|y_{k+1}-y_k\|&=\|L_1^{-1}[Q_1(y_k)-Q_1(y_{k-1})]\|\\&\leqslant\|L_1^{-1}\|\|Q_1(y_k)-Q_1(y_{k-1})\|.\end{aligned}$$

现假设: y_i, $0\leqslant i\leqslant k$, 满足不等式

$$\|y_i\|\leqslant\bar{\rho}_0.$$

由(*), 有

$$\|Q_1(y_k)-Q_1(y_{k-1})\|\leqslant K_0\bar{\rho}_0\|y_k-y_{k-1}\|.$$

从而

$$\begin{aligned}\|y_{k+1}-y_k\|&\leqslant\|L_1^{-1}\|\|Q_1(y_k)-Q_1(y_{k-1})\|\\&\leqslant\|L_1^{-1}\|K_0\bar{\rho}_0\|y_k-y_{k-1}\|\\&\leqslant(\|L_1^{-1}\|K_0\bar{\rho}_0)^k\|y_1-y_0\|\\&=(\|L_1^{-1}\|K_0\bar{\rho}_0)^k\|y_1\|,\end{aligned}$$

其中

$$y_1=y_0-L_1^{-1}G(y_0)=L_1^{-1}[Q(y_0)-y_0]=L_1^{-1}y^{(0)},$$

$$\|y_1\|\leqslant\|L_1^{-1}\|\|y^{(0)}\|=\|L_1^{-1}\|\varepsilon.$$

所以,

$$\begin{aligned}\|y_{k+1}\|&\leqslant\sum_{i=0}^{k}\|y_{i+1}-y_i\|\\&\leqslant\|L_1^{-1}\|\varepsilon\sum_{i=0}^{k}(\|L_1^{-1}\|K_0\bar{\rho}_0)^i\\&\leqslant\|L_1^{-1}\|\varepsilon[1-\|L_1^{-1}\|K_0\bar{\rho}_0]^{-1}\leqslant\bar{\rho}_0.\end{aligned}$$

因此，$\|y_k\|<\bar{\rho}_0$，$\forall k$；而且可证明存在极限

$$\lim_{k\to\infty} y_k=\bar{y}.$$

于是 $$G(\bar{y})=Q(\bar{y})-\bar{y}=0.$$

不动点的存在性得证.

至于唯一性，设另有一解 $\bar{\bar{y}}$ 满足 $\|\bar{\bar{y}}\|\leqslant\bar{\rho}_0$，$G(\bar{\bar{y}})=0$. 于是，

$$0=G(\bar{y})-G(\bar{\bar{y}}),\ Q_1(\bar{y})-Q_1(\bar{\bar{y}})=L_1(\bar{y}-\bar{\bar{y}}).$$

从而

$$\begin{aligned}\|\bar{\bar{y}}-\bar{y}\|&=\|L_1^{-1}[Q_1(\bar{y})-Q_1(\bar{\bar{y}})]\|\\&\leqslant\|L_1^{-1}\|\|Q(\bar{y})-Q_1(\bar{\bar{y}})\|\\&\leqslant\|L_1^{-1}\|K_0\bar{\rho}_0\|\bar{y}-\bar{\bar{y}}\|.\end{aligned}$$

但是，$\|L_1^{-1}\|K_0\bar{\rho}_0<1$，故 $\|\bar{y}-\bar{\bar{y}}\|=0$. ∎

[96] 利用定理 3.11，借助计算机证明了 Lorenz 方程

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a_1x+b_1yz+b_1xz,\\\frac{dy}{dt}&=a_2y-b_1yz-b_1xz,\\\frac{dz}{dt}&=-a_3z+(x+y)(b_2x+b_3y),\end{aligned}\tag{3.27}$$

在下列条件下存在周期轨道：

$$\begin{aligned}a_1&=9.700378782,\\a_2&=16.700378782,\\a_3&=8/3=2.666666667,\\b_1&=0.227266206,\\b_2&=2.616729797,\\b_3&=1.783396463.\end{aligned}$$

方程(3.27)，可经过变量的线性变换，由下列方程(Lorenz[144])得出：

$$\frac{dX}{dt}=-\sigma(X-Y),$$

$$\frac{dY}{dt}=-XZ+rX-Y,$$

$$\frac{dZ}{dt}=XY-bZ,$$

其中 σ 为 Prandt 数，r 为 Rayleigh 数，$b>0$ 为参数．上述的 a_i，$b_i(i=1, 2, 3)$相当于 $\sigma=6$，$r=28$，$b=8/3$．

[96]在平面 $z=27$ 上考虑 Poincaré 映射．由试探法，选取初始点 $x^{(0)}$ 为

$$(3.50078718468,\ 3.33083178466,\ 27).$$

然后按有限差分法去计算．最后证实周期轨道与 $x^{(0)}$ 的 $\frac{1}{3}\times10^{-6}$ 邻域相交．

Ruelle & Takens [145]，McLaughlin & Martin [146]，Guckenheimer [147]，Lanford [148]，Shimizu & Morioka [149]，Williams [150] 研究了 Lorenz 方程，发现了当

$$r>r_T=\sigma(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1),\ \sigma>b+1,$$

Lorenz 方程出现"奇异吸引子"(strange attractor)，称为Lorenz 吸引子．[149] 用计算机研究，发现了：固定 σ 和 b，取 $r>r_T$，并令 r 增大，则 Lorenz 方程会交替地出现稳定的极限环和奇异吸引子．因此，研究 Lorenz 方程的周期轨道，会提供此系统的奇异吸引子的结构的有用讯息．

有关这方面的研究，还可参考下列文献：Ruelle[151]，廖山涛[152]，Sparrow[216]．

3.9 其它结果

本节对其它一些与周期轨道存在性有关的结果作一综述．

【1】 一个问题是：在某不变集合的附近是否存在周期轨道，这方面的研究有若干结果．

Неймарк [80], Гаврилов 与 Шильников [81], Иванов [82] 研究了三维动力系统

$$\frac{dw}{dt}=W(w),$$

$W\in C^1(\mathbb{R}^3)$. 假设此系统存在周期解 $w(t,0)$, 其最小正周期为 τ. 于是, $\Gamma_1=\{w=w(t,0)\,|\,t\in[0,\tau]\}$ 是周期轨道. 又设下列二维流形分别是 Γ_1 的稳定流形和不稳定流形:

$$W^s=\{w_1\in\mathbb{R}^3\,|\,\mathrm{dist}[w(t,w_1),\ \Gamma_1]\to 0,\ t\to+\infty\},$$

$$W^u=\{w_2\in\mathbb{R}^3\,|\,\mathrm{dist}[w(t,w_2),\ \Gamma_1]\to 0,\ t\to-\infty\}.$$

设 Γ 是这样的一条轨道, 其 α 极限点集和 ω 极限点集都是 Γ_1. [80]证明了, 若 W^s 和 W^u 相对于 Γ 是不相切的, 则在 $\Gamma_1\cup\Gamma$ 的邻域内存在周期轨道. [81] 指出, 若 W^s 和 W^u 相对于 Γ 是一阶相切的, 则不一定存在周期轨道(在 $\Gamma_1\cup\Gamma$ 的邻域). [82]研究了 W^s 和 W^u 相对于 Γ 有任意阶相切的情形, 并给出在 $\Gamma_1\cup\Gamma$ 的一个邻域内存在周期轨道的充分必要条件.

Чернышев[83] 研究了上述系统在一不变环面 T^2 的任一邻域内存在无穷个周期轨道的充分条件. 至于不变环面的存在性, 有下列出色的工作: Колмогоров [84], Арнольд (Arnold) [85], Moser [86].

【2】 上述各节所讲的研究周期轨道的许多方法往往得不到周期轨道是否稳定的结论. Sell [20] 的结果则不同, 其要点是先寻求渐近稳定的轨道, 然后在这些轨道中看看有无周期轨道, 于是同时解决了周期轨道的存在性和稳定性. Cronin [87, 88, 89] 沿此方向结合系统 (1.1) 之映射 $F(x)$, 给出一些充分条件, 但是相当繁.

【3】 奇异摄动问题的周期轨道存在性. 粗略地讲, 奇异摄动问题是求解一个 n 维动力系统, 其中一个或多个 $\dot{x}_i$ 乘以参数 ε (接近于零). 一个简单的例子是

$$\dot{x}=f(x, y), \quad \varepsilon\dot{y}=g(x, y),$$

其中 $y\in\mathbb{R}^1$, $x\in\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 1$. 为确定起见，设 $m=2$. 设 $y=h(x)$是满足 $g[x, h(x)]=0$ 的函数。于是

$$\dot{x}=f[x, h(x)]$$

称为上系统的退化系统；现设 $x(t)$ 是退化系统的一个周期解，则 $y(t)=h[x(t)]$ 是周期函数，其周期与 $x(t)$ 的周期相同，而且当 $\varepsilon=0$ 时，$y(t)$ 满足原方程. 自然会问：原系统是否存在周期解 $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，它趋于$(x(t), y(t))$?

Friedrichs 与 Wasow[90]考虑了下列系统：

$$\begin{aligned}&\dot{x}_i=F_i(x_1, \cdots, x_n),\ i=1, \cdots, n-1,\\&\varepsilon\dot{x}_n=F_n(x_1, \cdots, x_n),\end{aligned}\tag{3.28}$$

其中 $F_j\in C^1$, $j=1, \cdots, n$; 其退化系统是

$$\begin{aligned}&\dot{x}_i=F_i(x_1, \cdots, x_n),\ i=1, \cdots, n-1,\\&0=F_n(x_1, \cdots, x_n).\end{aligned}\tag{3.29}$$

设 (3.29) 存在周期解 $(x_1, \cdots, x_n)=(u_1(t), \cdots, u_n(t))$，周期为 $T>0$ (称此解为“基础解”). [90]的主要定理是

定理 3.12(Friedrichs-Wasow [90]) 设系统 (3.29) 存在满足下列条件的非退化周期解$(x_1, \cdots, x_n)=(u_1(t), \cdots, u_n(t))$

$$\frac{\partial F_n(u_1, \cdots, u_n)}{\partial u_n}\neq 0,$$

则 $\forall\varepsilon$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, 系统 (3.28) 有唯一的周期轨道 $(U_1(t;\varepsilon), \cdots, U_n(t;\varepsilon))$，而且下列性质成立：

(甲) $\varepsilon\to 0$, $(U_1(t;\varepsilon), \cdots, U_n(t;\varepsilon))\to(u_1(t), \cdots, u_n(t))$, 而且收敛是一致的(对 t)；

(乙) $(U_1(t;\varepsilon), \cdots, U_n(t;\varepsilon))$有周期$T+\tau(\varepsilon)$，其中 $\tau(\varepsilon)\to 0$, $\varepsilon\to 0$;

(丙) $U_j(t;\varepsilon)$是 ε 的连续函数($j=1, \cdots, n$), $|\varepsilon|<\varepsilon_0$.

Levinson [91, 92] 对于“基础解”不连续的情形获得重要结

果. 设 $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^1$. 系统

$$\begin{aligned}&\dot{x}=f\dot{u}+\varphi,\\&\varepsilon\ddot{u}+g\dot{u}+h=0,\quad \varepsilon>0\end{aligned}\tag{3.30}$$

是[91, 92]的研究对象. 这里, f, φ 是 C^1 向量函数, 依赖于 x, u, t, ε; g, h 是 C^1 纯量函数, 依赖于同样的变量. 当 $\varepsilon=0$ 时, (3.30) 退化为

$$\begin{aligned}&\dot{y}=f\dot{v}+\varphi,\\&g\dot{v}+h=0,\end{aligned}\tag{3.31}$$

这里用 y, v 分别代替 x, u 以便区别这两系统. 因为 g 可以在某些点上为零, 故 (3.31) 的解可能有间断点. 函数 $y(t)$, $v(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ 叫做(3.31)的解, 如果(i)除却 t 的有限个值 τ_j, $\alpha<\tau_1<\cdots<\tau_N<\beta$ 之外, y, v 是连续的, 而且在 $\tau_j\pm0$ 处, y, v 有极限; (ii)在每个子区间(τ_j,τ_{j+1}), (α,τ_1), (τ_N,β), y, v 满足退化系统(3.31); (iii)在 $t=\alpha$, β, $g>0$, 在上述各子区间上, $g>0$, 当 $t\to\tau_j-0$ 时, $g\to0$.

设在间断点 τ 处, $\sum f_i(\partial g/\partial y_i)+(\partial g/\partial v)\neq0$, $h\neq0$.

定理 3.13(Levinson) 设退化系统 (3.31) 有解 S_0 (按上定义), $t\in[\alpha,\beta]$. 设 $\varepsilon>0$, δ_1, δ_2 充分小, 则系统(3.30)对任一组满足下列条件的初值均存在解 $x(t)$, $u(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$:

$$\|x(\alpha)-y(\alpha)\|+|u(\alpha)-v(\alpha)|\leqslant\delta_1,$$

$$\left|\frac{du(\alpha)}{dt}-\frac{dv(\alpha)}{dt}\right|\leqslant\frac{\delta_2}{\varepsilon}.$$

又设当 $\varepsilon\to0$, $\delta_1\to0$, $\delta_2\to0$ 时, $x(t)$, $u(t)$ 在 (x,u,t) 空间中的曲线趋于 S_0. 特别, 对任一固定的 $\delta>0$,

$$\|x(t)-y(t)\|+|u(t)-v(t)|\to0\quad(\varepsilon\to0,\ \delta_1\to0,\ \delta_2\to0),$$

收敛在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\tau_1-\delta$, $\tau_1+\delta\leqslant t\leqslant\tau_2-\delta$, $\cdots$, $\tau_N+\delta\leqslant t\leqslant\beta$ 上是一致的. 另外, 在上述区间有

$$\left(\frac{du}{dt}-\frac{dv}{dt}\right)\to0\quad(\varepsilon\to0,\ \delta_1\to0,\ \delta_2\to0),$$

而且收敛是一致的．同样的结果对$(d^2u/dt^2 \to d^2v/dt^2)$亦成立．

若系统(3.30)是自治的，定理仍然成立．

Wasow[93]考虑下列 n 阶微分方程：

$$\varepsilon^k x^{(n)} = F(x, x^{(1)}, \cdots, x^{(m)}; t; \varepsilon), \tag{3.32}$$

其中 $k>0$, $n>m\geqslant 0$ 都是整数，方程右端是解析的．他指出 Волк 的工作 [ПММ, 10, 559～574 (1946); 11, 433～444(1947); 12, 29～38(1948)] 存在严重错误，并结合 Волк 的方法和他本人的构思[J. Math. Phys. 23, 173～183(1944)]得出严格的理论．

这方面还有 Понтрягин[94]的工作．其余可参见 Cesari [95] 及 Cronin[88]．

【4】 廖山涛[200]对微分动力系统给出了一个较广泛的、判别周期轨道存在的定理，证明了，在适当条件下，靠近一“准双曲轨道弧”的周期轨道的存在性．

【5】 关于定向二维流形上的动力系统周期轨道存在性问题，有下列工作：

Saito [201], Гаврилов [202], Sack 与 Sell [203], Neumann [204], 余澍祥[205], 董镇喜[206]．

关于不可定向的二维流形上的动力系统的周期轨道存在性问题，工作不多，最近期的有董镇喜[207]的工作．

【6】 工程界经常采用的描述函数方法 (describing function method) 是研究非线性反馈系统的振动性质的一种近似法，例如 Gelb 与 Vander Velde[208]．这种方法的数学基础及其严格性问题，有人曾作过研究，参考：Kudrewicz[209], Bergen 与 Franks [210]．

4. 周期轨道的不存在性

在平面动力系统理论中，Bendixson 准则 [13, 97] 可用来决定系统(1.1)($n=2$)不存在闭轨道或不存在由轨道组成的闭曲线。这个准则又叫 Dulac 准则 [123]，还可参见 [1, 2]。至于$n(\geqslant 3)$维情形，这方面的结果不多。Демидович[98] 考虑动力系统 (1.1)($n=3$)，假设它存在首次积分 $H(x, y, z)=h$，而且向量场的 div 在单连通区域 $G\subset\mathbb{R}^3$ 内保持定号，则该系统在 G 内不存在周期轨道，但是，首次积分的存在，把问题归结为二维问题，所以本质上仍是 Bendixson 准则。Леонов[99] 针对一个三阶方程 $\dddot{x}=\varphi(\ddot{x},\dot{x},x)$ 提出不存在周期轨道的充分条件。Cronin[100] 给出两个抑制周期轨道，使系统出现大范围稳定的奇点的定理，其中一个定理证明增加常数项可抑制周期轨道，另一则证明增加线性项可抑制周期轨道。1981 年，Smith[124] 把 Bendixson (不存在闭轨道的) 准则作了推广，获相当进展。

4.1 Демидович 定理

Демидович[98] 考虑下列系统：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=P(x,\ y,\ z), \\ \dfrac{dy}{dt}=Q(x,\ y,\ z), \\ \dfrac{dz}{dt}=R(x,\ y,\ z), \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $P,\ Q,\ R:\mathbb{R}^3\supset G\to\mathbb{R}^1$, $P,\ Q,\ R\in C^1(G)$, G 为单连通区域. 令 $r=(x,\ y,\ z)$, $F=(P,\ Q,\ R)$, (4.1) 可表为

$$\frac{dr}{dt}=F(r). \tag{4.2}$$

定理 4.1(Демидович[98]) 设(i)系统(4.1)存在首次积分

$$H(x,\ y,\ z)=h,$$

而且曲面 $H(x,\ y,\ z)=h$ 是光滑、双侧、单连通的，其上任一简单闭曲线所围区域是有界的；(ii) 在 G 内（最多除却一零测集之外）有

$$\operatorname{div} F=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\geqslant 0$$

(或 $\operatorname{div} F\leqslant 0$), 则(4.1)在 G 内不存在周期轨道.

证明 设(4.1)存在周期轨道 L, 其方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t).$$

又设此轨道位在曲面 $H(x,\ y,\ z)=h_0$ 之上，令 S 为 L 在此曲面上所围区域，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\cos\beta+\boldsymbol{k}\cos\gamma$ 为 S 之单位法向量. 于是有

$$\boldsymbol{n}\cdot F=0. \tag{4.3}$$

$$(\boldsymbol{n}\times F)dr=(\boldsymbol{n}\times F)\cdot F dt\equiv 0. \tag{4.4}$$

由 Stokes 定理,

$$\oint_L(\boldsymbol{n}\times F)dr=\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot}(\boldsymbol{n}\times F)ds=0. \tag{4.5}$$

但是

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{n}\times F)=\boldsymbol{n}\operatorname{div} F-F\operatorname{div}\boldsymbol{n} \\ +(F,\ \operatorname{grad})\boldsymbol{n}-(\boldsymbol{n},\ \operatorname{grad})F,$$

其中

$$(\boldsymbol{a}, \text{grad})\boldsymbol{b}=a_x\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial x}+a_y\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial y}+a_z\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial z},$$

$$\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z).$$

所以，

$$\boldsymbol{n}\cdot\text{rot}(\boldsymbol{n}\times F)=\text{div}\,F-(\boldsymbol{n}\cdot F)\text{div}\,\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\cdot(F, \text{grad})\boldsymbol{n}$$
$$-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}, \text{grad})F, \tag{4.6}$$

而

$$\boldsymbol{n}\cdot(F, \text{grad})\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}\cdot\left(P\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x}+Q\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial y}+R\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial z}\right)$$
$$=\frac{1}{2}F\cdot\text{grad}(\boldsymbol{n})^2=0. \tag{4.7}$$

从而得

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}, \text{grad})F=\boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma\right)$$
$$=\boldsymbol{n}\cdot\text{grad}(\boldsymbol{n}\cdot F)-\frac{1}{2}F\cdot\text{grad}(\boldsymbol{n})^2$$
$$=\boldsymbol{n}\cdot\text{grad}(\boldsymbol{n}\cdot F)=0. \tag{4.8}$$

结合(4.3)，(4.6)，(4.7)，(4.8)，可得

$$\boldsymbol{n}\cdot\text{rot}(\boldsymbol{n}\times F)=\text{div}\,F-(\boldsymbol{n}\cdot F)\text{div}\,\boldsymbol{n}$$
$$+\boldsymbol{n}\cdot(F, \text{grad})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}, \text{grad})F=\text{div}\,F.$$

由(4.5)，有

$$\iint\limits_{S}\text{div}\,F\,ds=0.$$

这与假设(ii)相矛盾. ∎

4.2 Леонов 定理

Леонов[99]针对三阶方程

$$\dddot{x}=\varphi(\ddot{x}, \dot{x}, x), \tag{4.9}$$

或其等价系统

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1=\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3),\\
\dot{x}_2=x_1,\\
\dot{x}_3=x_2,
\end{cases}
\tag{4.10}
$$

其中 $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^3)$，给出不存在周期轨道的充分条件. 他利用 Якубович[101] 的结果证明下列定理:

定理 4.2(Леонов) 设

$$
\frac{\partial\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi(0,\ x_2,\ x_3)}{\partial x_3}<0,
$$

则系统(4.10)不存在周期轨道.

在证明此定理之前，先引述 Якубович 定理.

定理(Якубович[101]) 考虑动力系统 (1.1)，设 x_0 为奇点，假设存在 $V(x)\in C(\mathbb{R}^n)$，$V(x_0)=0$，而且满足下列条件:

(i) 对任一运动 $g(t,\ p)$，$V(g(t,\ p))$ 是 t 的非增函数;

(ii) 若存在 $\hat{t}>0$，使 $V(g(t,\ p))=\text{const.}$，$\forall t\in[0,\ \hat{t}]$，则必有 $g(t,\ p)=x_0$，$\forall t\in[0,\ \hat{t}]$;

那末或是(甲)$\lim\limits_{t\to\infty}\|g(t,\ p)\|=\infty$，或是(乙)$\lim\limits_{t\to\infty}g(t,p)=x_0$[注].

[注]

(1) 若存在 $V(x)\in C^1(\mathbf{R}^n)$，$\langle\operatorname{grad}V(x),\ F(x)\rangle\leqslant 0$，$x\in\mathbf{R}^n$，则此定理之条件 (i) 成立.

(2) 若存在 $u(x)=(u_1(x),\ \cdots,\ u_n(x))^T\in C^1(\mathbf{R}^n)$，而且

$$
\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n,
$$

$$
[u(x)]^TF(x)\leqslant 0,\ x\in\mathbf{R}^n,
$$

则存在 $V(x)$，使 $u(x)=\operatorname{grad}V(x)$，从而(1)成立.

(3) Якубович 定理之条件 (i) 可用下列来代替: 设存在函数 $c_i(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in C^1(\mathbf{R}^n)$，$i=1,\ \cdots,\ n$，满足

$$
w(x)=\sum_{i=1}^{n}F_i\Big(c_i+\sum_{k=1}^{i-1}\int_0^{x_{i-k}}\frac{\partial c_{i-k}}{\partial x_i}\,dx_{i-k}\Big)\leqslant 0.
$$

事实上，取

$$
u(x)=\Big(c_1,\ c_2+\int_0^{x_1}\frac{\partial c_1}{\partial x_2}\,dx_1,\ c_3+\int_0^{x_2}\frac{\partial c_2}{\partial x_3}\,dx_2+\int_0^{x_1}\frac{\partial c_1}{\partial x_3}\,dx_1,\ \cdots,
$$

$$
c_n+\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{x_{n-k}}\frac{\partial c_{n-k}}{\partial x_n}\,dx_{n-k}\Big),
$$

有 $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$，$i,\ j=1,\ \cdots,\ n$，利用 (2) 可得结论.

定理 4.2 的证明 取 $c_1=x_1,\ c_2=-\varphi(0,\ x_2,\ x_3),\ c_3=0$，于是

$$u(x)=\left(x_1,\ -\varphi(0,\ x_2,\ x_3),\ -\int_0^{x_3}\frac{\partial\varphi(0,\ x_2,\ x_3)}{\partial x_3}dx_2\right),$$

$$\begin{aligned}w(x)=&x_1\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)-x_1\varphi(0,\ x_2,\ x_3)\\&-x_2\int_0^{x_3}\frac{\partial\varphi(0,\ x_2,\ x_3)}{\partial x_3}dx_2\\=&\frac{\partial\varphi(\hat{x}_1,\ x_2,\ x_3)}{\partial x_1}x_1^2-\frac{\partial\varphi(0,\ \hat{x}_2,\ x_3)}{\partial x_3}x_2^2.\end{aligned}$$

故当 $\dfrac{\partial\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)}{\partial x_1}<0,\ \dfrac{\partial\varphi(0,\ x_2,\ x_3)}{\partial x_3}>0,\ w(x)<0$，利用 Якубович 定理知系统(4.10)不存在周期轨道；当 $\dfrac{\partial\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3)}{\partial x_1}>0,\ \dfrac{\partial\varphi(0,\ x_2,\ x_3)}{\partial x_3}>0,\ w(x)>0$，令 $t\mapsto -t$，可用 Якубович 定理，亦推出(4.10)不存在周期轨道. ∎

4.3 Cronin 定理

外界因素可以抑制生物系统的振荡运动，这里指的是：施加此因素时，生物振荡停止，但如撤去此因素，振荡便恢复. 生物实验背景材料参见 K. Oatley and B. C. Goodwin[125]; D. Njus, F. M. Sulzman and J. W. Hastings[126]; J. W. Hastings[127]; F. A. Brown, Jr., J. W. Hastings and J. D. Palmer[128].

相应的数学解释是：若描写此生物系统的微分方程的某些参数发生变化，该系统的周期解消失，出现全局渐近稳定的奇点. 上述文献所描述的某些特殊生物系统，所改变的参数，或是出现在方程的常数项，或是出现在方程的线性项之中. Cronin[100]沿此方向给出两个定理，一个是证明附加常数项可使周期解或几乎周期解消失，另一个则证明附加线性项可达同样的目的.

考虑 n 维动力系统(1.1)，并设可改写为下形

$$\dot{x}=Ax+f(x),\tag{4.11}$$

在本节中，$x\in\mathbb{R}^n$ 之模 $\|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，所以

$$\|x\|\leqslant\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}.$$

假设系统(4.11)还满足下列条件：

(H-1) $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，如果

$$z^n+A_1z^{n-1}+\cdots+A_{n-1}z+A_n=0$$

是常阵 A 之特征方程，则下列行列式皆为正值：

$$\delta_1=A_1,$$

$$\delta_k=\begin{vmatrix}A_1 & A_3 & A_5 & \cdots & A_{2k-1}\\ 1 & A_2 & A_4 & \cdots & A_{2k-2}\\ 0 & A_1 & A_3 & \cdots & A_{2k-3}\\ 0 & 1 & A_2 & \cdots & A_{2k-4}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_k\end{vmatrix},\quad k=2,\ \cdots,\ n,$$

其中 $A_j=0$, $\forall j>n$. 于是由 Routh-Hurwitz 准则，存在 $\sigma>0$，使得 A 之每一特征值 λ 皆满足

$$\mathrm{Re}(\lambda)<-\sigma,$$

可参考 Marden[129]. 于是存在满秩阵 P，使 $PAP^{-1}=B$，而且若令 $y=Px$，则有 $y^TBy\leqslant-\sigma\sum_{i=1}^{n}y_i^2$（参考 Coddington and Levinson[4, pp. 340～341]）. 因此，假设已作这种变换，从而设

$$x^TAx\leqslant-\sigma\sum_{i=1}^{n}x_i^2. \tag{4.12}$$

(H-2) 令 $\mathbb{R}_+^n=\{x\in\mathbb{R}^n|x_i\geqslant0,\forall i\}$，设存在 $\overline{m}>0$，使得

$$\|f(x)\|<\overline{m},\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^n$$

(H-3) $\forall\varepsilon>0$, $\exists B(\varepsilon)>0$，使得

$x\in\mathbb{R}_+^n$, $\|x\|\geqslant B(\varepsilon)\Rightarrow|\partial f_i/\partial x_j(x)|<\varepsilon$, i, $j=1$, $\cdots$, n.

(H-4) 设 $\mathbb{K}=\left\{x\in\mathbb{R}_+^n\,|\,x_i\geqslant m\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}x_j,\ i=1,\cdots,n\right\}$, $m\in(0,1)$,

$x(t)$是(4.11)的解，若 $x(t_0)\in\partial\mathbb{K}$，则 $x(t)\in\mathbb{K}$，$\forall t\geqslant t_0$.

对生物系统来说，变量 $x_1, \cdots, x_n$ 必须是非负的，而且在某种意义上说，必须保持有界．所以，要排除这样的可能性，即存在某解 $x(t)$ 及 t_1, t_2，使 $x(t_1)\in\mathbb{K}$，$t_2>t_1$（t_2 可为 ∞）而 $\lim\limits_{t\to t_2}\|x(t)\|=\infty$．假设($H$-1)，($H$-2)及($H$-4)排除了这种可能性，正如下列引理所示．

引理 1(Cronin[100]) 存在 $r_0>0$，若(4.11)的解 $x(t)$满足

$$x(t_0)\in\partial(B(0, r)\cap\mathbb{K}),\ t_0\in\mathbb{R}^1,$$

其中 $B(0, r)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\leqslant r^2,\ r\geqslant r_0\right\}$，则

$$x(t)\in B(0, r)\cap\mathbb{K},\ \forall t\geqslant t_0.$$

证明 由于有假设(H-4)，故仅需证明下列事实：

$$x(t_1)\in\partial B(0, r)\cap\partial(B(0, r)\cap\mathbb{K})\Rightarrow\exists\delta>0,$$

使当 $t\in(t_1, t_1+\delta)$，$\|x(t)\|<r$ 且 $\dot{x}(t_1)$ 与 $\partial B(0, r)$ 不相切．由假设，在 $t=t_0$，有

$$\sum_{i=1}^n x_i\dot{x}_i=x^TAx+x^Tf(x).$$

由假设(H-1)之(4.12)，有 $x^TAx\leqslant-\sigma\sum\limits_{i=1}^n x_i^2$；取

$$r\geqslant r_0=\sqrt{n}\left(\frac{\overline{m}+\varepsilon_0}{\sigma}\right),$$

其中 $\varepsilon_0>0$，$\overline{m}$ 是(H-2)之常数，则

$$\begin{aligned}x^TAx+x^Tf(x)&\leqslant-\sigma\sum_{i=1}^n x_i^2+\overline{m}\|x\|\\&\leqslant-\sigma r\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}+\overline{m}\|x\|\\&\leqslant-\sigma\sqrt{n}\left(\frac{\overline{m}+\varepsilon_0}{\sigma}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|+\overline{m}\|x\|\\&\leqslant-\varepsilon_0\|x\|,\end{aligned}$$

现引入下列定义(在第2章2.4节已涉及,不过当时是在度量空间上的动力系统中讨论的).

定义 4.3.1 (4.11)的解 $x(t)$ 是一致稳定的,如果存在 $k>0$,使得 $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\delta(\varepsilon)>0$,若 $u(t)$ 是(4.11)的解且存在 t_1, t_2, $t_2 \geqslant k$, $\|u(t_1)-x(t_2)\|<\delta(\varepsilon)$,则 $\|u(t+t_1)-x(t+t_2)\|<\varepsilon, \forall t \geqslant 0$. (4.11)的解 $x(t)$ 是渐近稳定的,如果(i) $x(t)$ 是一致稳定的,而且(ii)当 $\|u(t_1)-x(t_2)\|<\delta(\varepsilon)$,则存在 $t_3 \in \mathbb{R}^1$,使得

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t)-x(t+t_3)\|=0.$$

现把第2章2.4节的定理2.8(Deysach-Sell)和定理2.7(Sell)改述如下:

定理(Deysach-Sell) 设 $x(t)$ 是(4.11)的有界、一致稳定解,则存在(4.11)的几乎周期、一致稳定解 $\bar{x}(t)$,且 $\bar{x}(t)$ 的轨道属于 $x(t)$ 的 ω 极限点集.

定理(Sell) 设 $x(t)$ 是(4.11)的有界、渐近稳定解,则存在(4.11)的渐近稳定周期解 $y(t)$,且 $y(t)$ 的轨道就是 $x(t)$ 的 ω 极限点集.

由这两定理可推出下列(亦可参考 Cronin[102]):

定理 4.3(Cronin[102]) 设 $B(0, r_0)\cap\mathbb{K}$ 不含(4.11)的稳定[渐近稳定]奇点,且(4.11)存在一致稳定[渐近稳定]解 $x(t)$,使对某 $t_0\in\mathbb{R}^1$, $x(t_0)\in B(0, r_0)\cap\mathbb{K}$,则 $x(t)$ 的 ω 极限点集包含一条一致稳定的几乎周期解 $\bar{x}(t)$ 的轨道(不是奇点)而且 $\bar{x}(t)\in B(0, r_0)\cap\mathbb{K}$, $\forall t\in\mathbb{R}^1$[$x(t)$ 的 ω 极限点集就是 $B(0, r_0)\cap\mathbb{K}$ 内一条渐近稳定周期解的轨道].

此定理显示(4.11)可以存在周期解或几乎周期解. 现来考虑下列问题:若在(4.11)右端附加一常向量 $K\in\mathbb{R}^n\cap\mathbb{K}$, (4.11)在 $\mathbb{K}$ 的解有何变化. 换言之,考虑下列系统:

$$\dot{x}=Ax+f(x)+K. \tag{4.13}$$

若 $\|K\|$ 充分小,上述定理仍适用,这时(4.13)可存在周期解或几

乎周期解．但是，若 $\|K\|$ 充分大，则 (4.13) 在 $\mathbb{K}$ 内不存在周期轨道．我们有

定理 4.4(Cronin)　设系统(4.11)满足假设 $(H-1)$，$(H-2)$，$(H-3)$，$(H-4)$．则存在 $B>0$，使当 $K\in\mathbb{K}$，$\|K\|>B$，(4.13) 在 $\mathbb{K}$ 内有唯一的奇点 x_0，且 x_0 在 $\mathbb{K}$ 是大范围渐近稳定的．

证明　先勾画证明的梗概．

(1) **引理 2**　$\forall K\in\mathbb{K}$，$\exists r_1(K)\in\mathbb{R}^1$，使得

$$x(t_0)\in\partial B(0,\ r)\cap\mathbb{K},$$

$$r\geqslant r_1(K)\Rightarrow \dot{x}(t_0)\text{ 不与 }\partial B(0,\ r)\text{相切，且}$$

$$x(t)\in B(0,\ r)\cap\mathbb{K},\ \forall t\geqslant t_0,$$

这里 $x(t)$ 是(4.13)的解．

(2) **引理 3**　$\forall B>0$，$\exists r_2(B)>0$，使得

$$\|K\|>r_2(B),\ x_0\text{ 是(4.13)的奇点 }\Rightarrow\|x_0\|>B.$$

(3) **引理 4**　$\exists\beta>0$，使得

$$x_0\text{ 是(4.13)的奇点，且 }\|x_0\|>\beta\Rightarrow x_0\text{ 是渐近稳定的．}$$

(4) **引理 5**　$\exists k_0>0$，使得

$$\|\hat{K}\|>k_0\Rightarrow\exists r_3>0,\ r_4>0,\ r_3<r_4,\text{ 且方程}$$

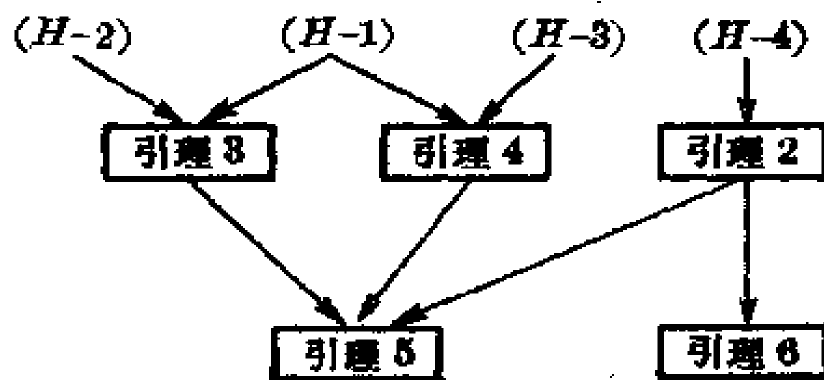
$$\dot{x}=Ax+f(x)+\hat{K} \tag{4.14}$$

存在渐近稳定奇点 x_0，$x_0\in\operatorname{Int}[B(0,\ r_4)\cap\overline{(\mathbb{K}\setminus\overline{B(0,\ r_3)})}]$．

(5) **引理 6**　引理 5 的奇点 x_0 在 $\mathbb{K}$ 是大范围渐近稳定的．

从而定理 4.4 得证．　∎

这些引理间的逻辑关系为



以下分别证明上述各引理:

引理 2 的证明 只需证明(4.13)的解都不能离开 $\mathbb{K}$. 其余的证明基本上与引理 1 的证法一样.

假设 $(H-4) \Rightarrow$ 若 $\tilde{x}(t)$ 是 (4.11) 的解而且 $\tilde{x}(t_0) \in \partial\mathbb{K}$, 则 $\frac{d}{dt}\tilde{x}(t_0) \in \partial\mathbb{K}$ 或指向 $\mathrm{Int}\,\mathbb{K}$. 于是, 若 $x(t)$ 是 (4.13) 的解, 而且 $x(t_1) = \tilde{x}(t_0)$, 则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t_1) &= Ax(t_1) + f(x(t_1)) + K \\ &= A\tilde{x}(t_0) + f(\tilde{x}(t_0)) + K,\end{aligned}$$

其中 $A\tilde{x}(t_0) + f(\tilde{x}(t_0)) \in \partial\mathbb{K}$ 或指向 $\mathrm{Int}\,\mathbb{K}$, 而 $K \in \mathbb{K}$, 所以 $\frac{d}{dt}x(t_1)$ 指向 $\mathrm{Int}\,\mathbb{K}$. ∎

引理 3 的证明 已知 $Ax_0 + f(x_0) + K = 0$; 假设 $(H-1) \Rightarrow A$ 之特征根皆非零 $\Rightarrow A^{-1}$ 存在 $\Rightarrow x_0 = -A^{-1}f(x_0) - A^{-1}K \Rightarrow$

$$\|x_0\| \geqslant \|A^{-1}K\| - \|A^{-1}\|\tilde{m}. \quad [\text{利用}(H-2)]$$

所以, 当 $\|K\|$ 充分大时, $\|x_0\| > B$. ∎

引理 4 的证明 设 x_0 是(4.13)的奇点, 为了研究其渐近稳定性, 考虑矩阵

$$\tilde{A} = A + Df(x_0),$$

其中 $Df(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的 Jacobi 阵; 假设$(H-1)$, $(H-3)$ 及 Routh-Hurwitz 准则 $\Rightarrow$ 当 $\|x_0\|$ 充分大时, $\tilde{A}$ 的特征根均具负实部, 从而 x_0 是渐近稳定的. ∎

引理 5 的证明 令 $k_0^{(1)} = r_2(\beta)$, 其中 β 是引理 4 的常数, $r_2(\cdot)$ 是引理 3 所给定的函数. 取 $r_3 > \beta$, 同时利用假设 $(H-3)$. 取 r_3 充分大, 使得

$$\hat{x} \in \mathscr{C}[\mathbb{K} \backslash B(0, r_3)] \Rightarrow \|Df(\hat{x})\| < \varepsilon_0\sigma,$$

其中 $\mathscr{C}[\mathbb{K}\backslash B(0, r_3)]$ 是 $\mathbb{K}\backslash B(0, r_3)$的凸包, $\sigma > 0$ 是 $(H-1)$ 中的常数. (这样做的目的是为证明引理 6 下的伏笔, 以便将来运用

Gronwall 引理.)

以下证明存在 $k_0^{(2)}>0$, 使得

$\hat{x}\in\partial[\mathbb{K}\backslash B(0, r_3)]$, $\hat{K}\in\mathbb{K}$, $\|\hat{K}\|>k_0^{(2)}\Rightarrow$(4.14)过 $\hat{x}$ 的解或者在 $\hat{x}$ 与 $\partial[\mathbb{K}\backslash B(0, r_3)]$ 相切,或者它在 $\hat{x}$ 的切向量指向 $\mathrm{Int}[\mathbb{K}\backslash B(0, r_3)]$.

事实上, 对于 $\hat{x}\in\partial\mathbb{K}$, 按引理 2 的证法, 可得上结论. 对于 $\hat{x}\in\mathbb{K}\cap\partial B(0, r_3)$, 有

$$\begin{aligned}\hat{x}^T\dot{\hat{x}}&=\hat{x}^TA\hat{x}+\hat{x}^Tf(\hat{x})+\hat{x}^TK\\&\geqslant\hat{x}^TK-\|A\|\|\hat{x}\|^2-\overline{m}\|\hat{x}\|.\end{aligned}\tag{4.15}$$

另方面, 假设(H-4)及 $\hat{x}\in\mathbb{K}\Rightarrow$

$$\hat{x}_i\geqslant m\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\hat{x}_j,\ i=1,\ \cdots,\ n,$$

$$(1+m)\hat{x}_i\geqslant m\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_j=m\|\hat{x}\|,$$

$$x_i\geqslant\frac{m\|\hat{x}\|}{1+m}.$$

又因 $\hat{K}\in\mathbb{K}$, 故

$$\hat{x}^T\hat{K}\geqslant\|\hat{K}\|\frac{m\|\hat{x}\|}{1+m}.\tag{4.16}$$

于是,

$$\begin{aligned}\hat{x}^T\dot{\hat{x}}&\geqslant\|\hat{K}\|\frac{m\|\hat{x}\|}{1+m}-\|A\|\|\hat{x}\|^2-\overline{m}\|\hat{x}\|\\&=\left(\frac{m\|\hat{K}\|}{1+m}-\|A\|\|\hat{x}\|-\overline{m}\right)\|\hat{x}\|\\&\geqslant\left[\frac{m\|\hat{K}\|}{1+m}-\|A\|\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i^2\right)^{1/2}-\overline{m}\right]\|\hat{x}\|\\&\geqslant\left[\frac{m\|\hat{K}\|}{1+m}-\|A\|\sqrt{n}\ r_3-\overline{m}\right]\|\hat{x}\|.\end{aligned}\tag{4.17}$$

所以, $\exists k_0^{(2)}>0$, 使

$$\|\hat{K}\|>k_0^{(2)}\Rightarrow\hat{x}^T\dot{\hat{x}}>0,\ \forall\hat{x}\in\mathbb{K}\cap\partial B(0, r_3).$$

从而 (4.14) 过 $\hat{x}\in\mathbb{K}\cap\partial B(0, r_3)$ 的解在 $\hat{x}$ 之切向量指向 $\mathrm{Int}[\mathbb{K}\setminus B(0, r_3)]$.

取 $\hat{K}\in\mathbb{K}$, $\|\hat{K}\|>\max(k_0^{(1)}, k_0^{(2)})$, 令 $r_4>r_1(\hat{K})$, 其中 $r_1(\cdot)$ 是引理 2 所给出的函数,则由引理 2 推出

$$\hat{x}\in\mathbb{K}\cap\partial B(0, r_4)\Rightarrow(4.14)\text{过 }\hat{x}\text{ 的解在 }\hat{x}\text{ 之切向量指向}$$

$$\mathrm{Int}[\mathbb{K}\cap B(0, r_4)].$$

于是,若 $x(t)$ 是(4.14)的解而且对某 $t_0\in\mathbb{R}^1$,

$$x(t_0)\in\partial[\mathbb{K}\cap(B(0, r_4)\setminus B(0, r_3))],$$

则 $x(t)$ 在 t_0 之切向量或者与 $\partial[\mathbb{K}\cap(B(0, r_4)\setminus B(0, r_3))]$ 相切,或者指向 $\mathrm{Int}[\mathbb{K}\cap(B(0, r_4)\setminus B(0, r_3))]$. 由 Alexandroff & Hopf [130] (p. 479 的定理 1) 得, $\exists$(4.14) 的奇点 $x_0\in\mathrm{Int}[\mathbb{K}\cap(B(0, r_4)\setminus B(0, r_3))]$. 但因 $r_3>\beta$, 故 $\|x_0\|>\beta$, 由引理 4 知 x_0 是渐近稳定的. ∎

引理 6 的证明 欲证:若 $x(t)$ 是 (4.14) 的解,且 $\exists t_0\in\mathbb{R}^1$ 使 $x(t_0)\in\mathbb{K}$, 则 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=x_0$.

假设(H-4) 及引理 2 的证法 $\Rightarrow x(t)\in\mathbb{K}$, $\forall t\geqslant t_0$. 由不等式 (4.17), 若对某 t, $\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i(t))^2\right]^{1/2}\leqslant r_3$, 则 $\exists\tilde{t}\in\mathbb{R}^1$, 使 $x(t)\in\mathbb{K}\setminus B(0, r_3)$, $\forall t\geqslant\tilde{t}$.

引理 $2\Rightarrow\exists\hat{t}\in\mathbb{R}^1$, 使 $x(t)\in\mathbb{K}\cap B(0, r_4)$, $\forall t\geqslant\hat{t}$.

因此, $\exists\tau\in\mathbb{R}^1$, 使

$$x(t)\in\overline{(B(0, r_4)\cap\mathbb{K})\setminus B(0, r_3)}, \forall t\geqslant\tau.$$

对于 $t\geqslant\tau$, 有

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+f(x(t))+\hat{K},$$

其中 $x(t)\in\overline{(B(0, r_4)\cap\mathbb{K})\setminus B(0, r_3)}$; 另外有

$$0=Ax_0+f(x_0)+\hat{K},$$

由此两式得,

$$\frac{d}{dt}[x(t)-x_0]=A[x(t)-x_0]+f(x(t))-f(x_0)$$

$$=A[x(t)-x_0]+\{Df[x_0+\theta(x(t)-x_0)]\}[x(t)-x_0],$$

$$\theta\in(0,1).$$

因 $x_0,\ x(t)\in\overline{(B(0,r_4)\cap\mathbb{K})\backslash B(0,r_3)}$，故

$$x_0+\theta[x(t)-x_0]\in\mathscr{C}[\mathbb{K}\backslash B(0,r_3)].$$

由引理 5 证明中对 r_3 所作之选择推出

$$\|Df[x_0+\theta(x(t)-x_0)]\|<\varepsilon_0\sigma,$$

其中 $\varepsilon_0\sigma$ 满足

$$c_2(\varepsilon_0\sigma)-a<0,$$

而 c_2, a 是这样的常数：设 $\Phi(t)$ 是 $\dot{x}=Ax$ 的基本解阵，$\Phi(0)=I$，则

$$\|\Phi(t)\|\leqslant c_2e^{-at}.$$

于是运用 Gronwall 引理，按 L. Cesari[131]，可得

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)-x_0\|=0.$$ ∎

有关这方面的生物学背景，除参考本节开头所列文献之外，还可参阅 L. Danziger & G. L. Elmergreen [132]; N. Rashevsky [133]; J. Cronin [134].

现来考虑附加线性项以抑制振荡的情形. 仍从系统 (4.11) 出发，不过这时假设下列：

(h-1) $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为常阵，A 之每特征根皆满足 $\mathrm{Re}(\lambda)<0$;

(h-2) $\exists M_1>0$, $\|f(x)\|<M_1$, $\forall x\in\mathbb{R}^n_+$;

(h-3) $\exists M_2>0$, $\|Df(x)\|<M_2$, $\forall x\in Q\subset\mathbb{R}^n_+$，其中 $Q\supset\mathbb{R}^n_+$ 为开集;

(h-4) 若 $x(t)$ 是 (4.11) 的解，且 $\exists t_0\in\mathbb{R}^1$, $x(t_0)\in\partial\mathbb{R}^n_+$，则 $x(t)\in\mathbb{R}^n_+$, $\forall t\geqslant t_0$.

于是，按定理 4.3，(4.11)可存在几乎周期解或周期解．现在要讨论的问题是：在(4.11)的线性项中作何变化，可使这几乎周期解或周期解消失？为此，再作另一假设：

(h-5) 令 $L(\mu)\in\mathbb{R}^{n\times n}$，其每一元素均是 μ 的连续函数($\forall\mu\geqslant 0$)，而且

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}[\mathrm{Re}(\lambda_i(\mu))]$$

当 $\mu\to\infty$ 时减少且无下界，这里 $\lambda_i(\mu)$，$i=1,\cdots,n$，表示矩阵 $A+\mu L(\mu)$ 的特征根．同时设(h-4)对于方程

$$\dot{x}=Ax+f(x)+\mu L(\mu)x,\quad \mu>0 \tag{4.18}$$

成立．

定理 4.5(Cronin) 设系统 (4.11) 满足假设(h-1)，(h-2)，(h-3)，(h-4)，且 $L(\mu)$满足(h-5)，则 $\exists\mu_1>0$，使得

$\mu>\mu_1\Rightarrow$(4.18) 存在奇点 $x_0\in\mathbb{R}^n_+$，x_0 在 $\mathbb{R}^n_+$ 大范围渐近稳定．

证明 可类似于以上定理的证法证明．首先可得

引理 7 $\exists\mu_0>0$，使得 $\mu\geqslant\mu_0$ 时，$\exists r_\mu>0$，使

$r\geqslant r_\mu$，$x(t_0)\in\partial B(0, r)$，

$x(t)$是(4.18)的解 $\Rightarrow x(t)\in B(0, r)$，$\forall t\geqslant t_0$．

引理 8 $\forall\mu\geqslant\mu_0$，若 $r\geqslant r_\mu$，则 (4.18) 在 $\mathrm{Int}[\mathbb{R}^n_+\cap B(0, r)]$ 存在奇点 x_0．

由假设(h-5)，引理 7 及 Alexandroff-Hopf[130] (p. 479 的定理 1)可推出此引理．

引理 9 若 μ 充分大且 $r\geqslant r_\mu$，则引理 8 之奇点 x_0 是在 $\mathbb{R}^n_+\cap B(0, r)$大范围渐近稳定的．

可循上定理的引理 6 证明中运用 Gronwall 引理那部分的方法证此引理．

至此定理成立． ∎

4.4 Smith 定理

关于 Bendixson (不存在闭轨道的)准则的推广问题，还有下列工作：

1974, Kurth[135] 对 Bendixson 准则作了如下的推广.

定理 4.6 (Kurth) 设 $G\subset\mathbb{R}^n$ 为开区域, $f:G\to\mathbb{R}^n$ 在 G 内有连续偏微商, 而且

$$(\operatorname{div} f)(x)>0,\ \forall x\in G.$$

令 $P\subset G$ 为满足下列条件的集合:

(i) 初值问题 $\dot{x}=f(x)$, $x(0)=a\in P$ 的解 $\Phi(a, t)$ 是周期解;

(ii) 轨道 $\{\Phi(a, t)\mid t\in\mathbb{R}^1\}\subset G$.

则集合 P 为 Lebesgue 可测集, 而且其测度为 0.

可是, 这个定理没有解决系统 $\dot{x}=f(x)$ 在 G 内是否没有周期轨道的问题.

1981, Smith[124] 研究了 Bendixson 准则的推广, 取得进展. Smith 注意到, 当 $n\geqslant 3$, 如不附加条件, Bendixson 准则是不成立的. 例如: $d\xi/dt=\eta$, $d\eta/dt=-\xi$, $d\zeta/dt=-2\zeta$. 这时 $f=(\eta, -\xi, -2\zeta)$, $\operatorname{div} f<0$ 在 $\mathbb{R}^3$ 成立, 但此系统存在周期轨道.

现介绍 Smith 的一个结果[124, 定理 6 的第一部分].

考虑动力系统

$$\dot{x}=f(x),$$

其中 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中每点满足局部 Lipschitz 条件, 又设

(H 1) $\dot{x}=f(x)$ 的一切解 $x(t)$ 都在 $(-\infty, \infty)$ 存在.

(H 2) 存在常数 $\lambda>0$, $\varepsilon>0$ 及二次型 $V(x)$, 使得

$$2\lambda V(x_1(t)-x_2(t))+\frac{d}{dt}V(x_1(t)-x_2(t))\leqslant-\varepsilon\,|x_1(t)-x_2(t)|^2$$

对 $\dot{x}=f(x)$ 的每对解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 成立.

(H 3) $V(x)=x^TPx$, 其中 P 为 $n\times n$ 实对称阵, 它有两个负特征值, $n-2$ 个正特征值.

(H 3) 中的 $V(x)$, 可经过满秩线性变换 $x=Q\,\mathrm{col}(X, Y)$, Q 为可逆阵, $X\in\mathbb{R}^2$, $Y\in\mathbb{R}^{n-2}$, 化为标准形:

$$V(x)=Y^2-X^2.$$

定义映射 $\Pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2$, $\Pi x=X$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$.

定理 4.7 (Smith) 设 $\dot{x}=f(x)$ 满足 (H 1), (H 2), (H 3), $D\subset\mathbb{R}^2$ 为单连通开集, 如果存在连续函数 $\sigma:\Pi^{-1}D\to\mathbb{R}^1$, 使 $\sigma(x)f(x)\in C^1(\Pi^{-1}D)$, 而且在 $\Pi^{-1}D$ 内, 有

$$\sigma>0,\ (n-2)\lambda\sigma+\mathrm{div}(\sigma f)>0.$$

则在 $\Pi^{-1}D$ 内不存在 $\dot{x}=f(x)$ 的不变集 C (C 为简单闭曲线).

若 $D=\mathbb{R}^2$, 则 $\Pi^{-1}D=\mathbb{R}^n$, 这时定理 4.7 较易运用.

定理 4.7 的证明大意陈述如下.

为此, 先引入若干定义.

设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是系统 $\dot{x}=f(x)$ 的紧致不变集, 令

$$v_s(x)=\max_{p\in S}V(x-p).$$

设存在有界开集 $D_s\subset\mathbb{R}^2$, 使得 $\partial D_s=\Pi S$, 记 $\overline{D}_s=D_s\cup\partial D_s$, 定义

$$E_s=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,v_s(x)\leqslant 0\quad\text{而且}\quad \Pi x\in\overline{D}_s\}.$$

于是, 由假设 (H 2) 可推出

引理 1 ([124]) (甲) $e^{2\lambda t}v_s(x(t))$ 是单调下降的, 其中 $x(t)$ 是 $\dot{x}=f(x)$ 的任一解;

(乙) 当 $\dot{x}=f(x)$ 的解 $x(t)\notin S$, 则 $e^{2\lambda t}v_s(x(t))$ 严格单调下降.

利用引理 1, 可证明

引理 2 ([124, 引理 3]) 设系统 $\dot{x}=f(x)$ 有不变集 C (C 是简单闭曲线), $\zeta\in D_c$, 则存在解 $x(t)$ 满足:

$$\Pi x(0)=\zeta,$$

$$v_c(x(t))\leqslant 0,\ \forall t.$$

用引理 1, 引理 2 可推出

引理 3([124, 定理 2]) 设(H 1), (H 2), (H 3) 成立, 而且 $\dot{x}=f(x)$ 有不变集 C(C 是简单闭曲线). 则

(i) ∃ 不变集 M, M 有下列性质:

$$M\subset \mathrm{Int}\, E_c,$$

$$\overline{M}=C\cup M,$$

$\overline{M}$ 与 $\overline{D}_c$ 同胚.

(ii) 若 $x(t)$ 是 $\dot{x}=f(x)$ 的解, $\Pi x(t)\in \overline{D}_c$ (对某 $t\in \mathbb{R}^1$), 且 $e^{M}x(t)\to 0\ (t\to -\infty)$, 则 $x(t)\in \overline{M}$, $\forall t\in \mathbb{R}^1$.

运用引理 1, 引理 3 可推出定理 4.7, 办法是用反证法.

5. 周期轨道的唯一性

要判定动力系统(1.1)的周期轨道(如果存在的话)是否唯一，这是个较困难而且需要细致工作的问题.

Göran Borg[103] 观察到如果系统 (1.1) 的轨道之间的距离随时间 t 增加而减少，则可证明在某有界区域 D 内，(1.1)的周期轨道是唯一的. 后来，Sherman[42] 成功地应用 Borg 的结果证明了描写一个核自旋发生器的三阶动力系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta x + y, \\ \dot{y} = -x - \beta y(1 - kz), \\ \dot{z} = \beta[\alpha(1 - z) - ky^2] \end{cases}$$

的周期轨道是唯一的(参见本书第 7 章).

总之，(1.1)的周期轨道唯一性问题是一个棘手的题目. Borg 的结果是不易应用的. 因此，常需按照具体情况作具体分析，针对方程的特点制订解决的方法. 下列文献就是沿此方向努力的例子：秦元勋[104]，李炳熙 [105, 106]，Dai[48] (参见本书第 7 章有关部分).

5.1 Borg 定 理

考虑动力系统(1.1)，以下取

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2},\ x\in\mathbb{R}^n,\ \langle x,\ y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\ x,\ y\in\mathbb{R}^n,$$

$J(x)$表 $F(x)$在 x 处的 Jacobi 阵，即

$$J(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1(x)}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2(x)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial F_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_n(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix}.$$

和以前一样，设 $g^t:\mathbb{R}^1\times M\to M$ 为(1.1)所确定的动力流；$\Gamma(p)=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\exists(t,\ p)\in\mathbb{R}^1\times M$ 使 $g(t,\ p)=x\}$，换言之，$\Gamma(p)=\{g(t,\ p)\,|\,t\in\mathbb{R}^1\}$；$\Gamma^+(p)=\{g(t,\ p)\,|\,t\in\mathbb{R}^1_+\}$ 是过 p 的正半轨道；Ω_p 是轨道 $\Gamma^+(p)$的 ω 极限点集。

定理 5.1(Borg[103]) 设系统(1.1)满足下列条件：

(i) $\langle J(y)(x-y),\ (x-y)\rangle\leqslant-\Delta\|x-y\|^2$, $\forall x,\ y\in D\subset M$, D 为有界区域；$\Delta>0$；$(x-y)$ 与 (1.1) 在 y 之向量场正交，即 $\langle F(y),\ (x-y)\rangle=0$；

(ii) $\overline{D}$ 不含(1.1)的奇点；

(iii) $\Gamma^+(p)\subset D$, $\forall p\in\overline{D}$.

则 (1.1) 在 D 内存在唯一的周期轨道 Γ(Ляпунов 稳定)，而且 $\Omega_p=\Gamma$, $\forall p\in D$.

为了证明此定理，先证两条引理。

引理 1 设系统(1.1)满足上述定理之条件(i), (ii)，则(1.1)的轨道 $\Gamma^+(p)(\subset\Sigma\subset D$, Σ 为闭区域)是 Ляпунов 稳定的，而且 $\exists\lambda>0$，使下列成立：

$$\forall k>0,\ \exists s>0,\ d(p,\ q)<s\Rightarrow\exists h(q)\in\mathbb{R}^1,\ |h(q)|<k,$$

$$d(g(t+h(q),\ p),\ g(t,\ q))<e^{-\lambda t}. \tag{5.1}$$

证明 $\Gamma^+(p)=\{g(t,\ p)\,|\,t\geqslant0\}$，记 $g(t,\ p)$ 的分量为 $g_i(t)$,

$i=1, \cdots, n$. 由假设(ii)，$\bar{D}$不含奇点，故存在 $b>0$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}[g_i'(t)]^2>b, \ \forall t\geqslant 0.$$

因 $F\in C^1(M)$，故 $g_i''(t)$ 连续且有界 $(t\geqslant 0)$．于是 $\Gamma^+(p)$ 的曲率有界．以下设法沿 $\Gamma^+(p)$ 引入新坐标系 $\theta, y_1, \cdots, y_{n-1}$，然后在 $\Gamma^+(p)$ 邻域用新坐标研究 (1.1) 的解的性态．为此，还引入函数 $V(y_1, \cdots, y_{n-1})=\|y\|^2=\sum\limits_{i=1}^{n-1}y_i^2, y=(y_1, \cdots, y_{n-1})$，并证明沿系统的解有 $\dot{V}<-\frac{\Delta}{2}V\leqslant 0$，从而证明 $x=g(t, p)$ 是 Ляпунов 稳定的．在此基础上再证明不等式(5.1)．这就是本证明的粗略轮廓．以下分别详述．

先引入新坐标系，改写系统的方程．任取 $g(\theta, p)\in\Gamma^+(p)$，过 $x=g(\theta, p)$ 作正交于 $\Gamma^+(p)$ 的 $(n-1)$ 维超平面．因 $\Gamma^+(p)$ 的曲率有界，故在 $\Gamma^+(p)$ 的充分小邻域内，这些超平面互不相交．在每个这种超平面上取正交坐标系 $y_1, \cdots, y_{n-1}$，而且新旧坐标之关系为

$$x_i=g_i(\theta)+\sum_{l=1}^{n-1}\psi_{il}(\theta)y_l, \quad i=1, \cdots, n, \tag{5.2}$$

其中 $\psi_{il}(\theta)$，$i=1, \cdots, n$；$l=1, \cdots, n-1$，可用 $g_s(\theta)$，$g_s'(\theta)$ 表出，从而 $\psi_{il}(\theta)$，$\psi_{il}'(\theta)$ 连续且有界 $(\theta\geqslant 0)$．此外，当 $x-g(\theta, p)$ 与 $\Gamma^+(p)$ 正交(在 $g(\theta, p)$ 处)时，有

$$\sum_{i=1}^{n}[x_i-g_i(\theta)]^2=\sum_{l=1}^{n-1}y_l^2. \tag{5.3}$$

(有关这种局部流动坐标，可参考 Hale[5, p. 214]．)

把(5.2)对 t 求微商，结合系统(1.1)，求解 $\frac{d\theta}{dt}$，$\frac{dy_l}{dt}$，可得微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta}{dt}=\tilde{\Theta}(y, \theta), \\ \dfrac{dy}{dt}=\tilde{G}(y, \theta),\end{cases} \tag{5.4}$$

其中 $y=(y_1, \cdots, y_{n-1})$, $\tilde{G}=(\tilde{G}_1, \cdots, \tilde{G}_{n-1})$. 于是 (1.1) 的解 $x=g(t, p)$ 变为 (5.4) 的解 $\theta=t$, $y=0$. 因此

$$\begin{cases}\tilde{\Theta}(0, \theta)\equiv 1, \\ \tilde{G}(0, \theta)\equiv 0.\end{cases} \tag{5.5}$$

再令

$$\theta=t+\tau, \tag{5.6}$$

(5.4) 变为

$$\begin{cases}\dfrac{d\tau}{dt}=\Theta(y, \tau, t), \\ \dfrac{dy}{dt}=G(y, \tau, t),\end{cases} \tag{5.7}$$

其中 $\Theta(y, \tau, t)=\tilde{\Theta}(y, t+\tau)-1$, $G(y, \tau, t)=\tilde{G}(y, t+\tau)$, 并记 $G=(G_1, \cdots, G_{n-1})$. 由 (5.5) 得, $\Theta(0, \tau, t)\equiv 0$, $G(0, \tau, t)\equiv 0$. 由 (5.2) 的形式及 $\psi_{il}(\theta)$ 的性质知, Θ, G, $\partial\Theta/\partial y_l$, $\partial G/\partial y_l$ 在 $t\geqslant 0$, $\|y\|$, $|\tau|$ 充分小时是连续且有界的. 另外, 因为 $\Theta(0, \tau, t)\equiv 0$, 故存在 $\beta>0$, 使当 $\|y\|$ 充分小时,

$$|\Theta(y, \tau, t)|\leqslant\beta\|y\|. \tag{5.8}$$

因为 $G(0, \tau, t)\equiv 0$, 所以 $G_s(y, \tau, t)$ 可表为

$$G_s(y, \tau, t)=\sum_{l=1}^{n-1} a_{sl}(t)y_l+A_s(y_1, \cdots, y_{n-1}, \tau, t), s=1, \cdots, n-1, \tag{5.9}$$

其中 $a_{sl}(s, l=1, \cdots, n-1)$ 在 $t\geqslant 0$ 是连续和有界的, 而 A_s 则满足 (当 $\|y\|$, $|\tau|$ 充分小时)

$$|A_s(y_1, \cdots, y_{n-1}, \tau, t)|<\gamma\|y\|, \quad s=1, \cdots, n-1, \tag{5.10}$$

其中 $\gamma>0$ 可取得任意小.

于是系统 (5.7) 可改写为

$$\begin{cases}\dfrac{d\tau}{dt}=\Theta(y, \tau, t), \\ \dfrac{dy_s}{dt}=\sum_{l=1}^{n-1} a_{sl}(t)y_l+A_s(y_1, \cdots, y_{n-1}, \tau, t), s=1, \cdots, n-1.\end{cases} \tag{5.11}$$

考虑函数

$$V=V(y_1, \cdots, y_{n-1})=\|y\|^2=\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2. \tag{5.12}$$

由(5.3)得

$$V=\sum_{i=1}^{n}[x_i-g_i(\theta)]^2=\|x-g(\theta, p)\|^2, \tag{5.13}$$

其中 $x-g(\theta, p)$ 与 $F(g(\theta, p))$ 正交, 即

$$\langle x-g(\theta, p), F(g(\theta, p))\rangle=0.$$

利用方程(5.11)可求出 $\dot V=\frac{d}{dt}V$,

$$\dot V=2\sum_{s=1}^{n-1}y_s\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_{si}y_i\right)+2\sum_{s=1}^{n-1}y_sA_s;$$

另方面, 由(1.1)及(5.13)得

$$\dot V=2\sum_{i=1}^{n}(x_i-g_i(\theta))\left[F_i(x_1, \cdots, x_n)-F_i(g_1(\theta), \cdots, g_n(\theta))\frac{d\theta}{dt}\right].$$

因 $\langle x-g(\theta, p), F(g(\theta, p))\rangle=0$, 即 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-g_i(\theta))F_i(g_1(\theta), \cdots, g_n(\theta))=0$, 所以可改写 $\dot V$ 为

$$\dot V=2\sum_{i=1}^{n}(x_i-g_i(\theta))[F_i(x_1, \cdots, x_n)-F_i(g_1(\theta), \cdots, g_n(\theta))].$$

注意及
$$F(x)-F(0)=\int_0^1 J(\mu x)x\,d\mu,$$

同理可得

$$F_i(x_1, \cdots, x_n)-F_i(g_1(\theta), \cdots, g_n(\theta))$$
$$=\int_0^1\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1^*, \cdots, x_n^*)[x_j-g_j(\theta)]d\mu,$$

其中 $x_s^*=\mu x_s+(1-\mu)g_s(\theta)$, $s=1, \cdots, n$, $\mu\in[0, 1]$. 于是又可表 $\dot V$ 为

$$\dot V=2\sum_{i=1}^{n}[x_i-g_i(\theta)]\sum_{j=1}^{n}\int_0^1\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1^*, \cdots, x_n^*)[x_j-g_j(\theta)]d\mu, \tag{5.14}$$

其中 $x_s^*=\mu x_s+(1-\mu)g_s(\theta)$, $s=1, \cdots, n$, 是 x^* 之诸分量, 而且

$$\mu\in[0,1],\ x^*-g(\theta,p)=\mu[x-g(\theta,p)],$$
$$\|x^*-g(\theta,p)\|\leqslant\|x-g(\theta,p)\|.$$

(5.14)可表为

$$\dot V=2\int_0^1\langle J(x^*)[x-g(\theta,p)],\ [x-g(\theta,p)]\rangle d\mu$$
$$=2\int_0^1\langle J(g(\theta,p))[x-g(\theta,p)],\ [x-g(\theta,p)]\rangle d\mu$$
$$+2\int_0^1\langle[J(x^*)-J(g(\theta,p))][x-g(\theta,p)],[x-g(\theta,p)]\rangle d\mu.$$

因 $J(x)$ 在 D 上一致连续，故当 $\|x-g(\theta,p)\|=\|y\|$ 充分小时，$J(x^*)-J(g(\theta,p))$ 任意小，另方面 $\langle[x-g(\theta,p)],\ F(g(\theta,p))\rangle=0$，所以由假设(i)可得

$$\dot V<-\frac{3}{2}\varDelta\|y\|^2\quad(\|y\|\text{ 充分小时}).\tag{5.15}$$

注意及(5.8)，(5.10)，(5.15)，可取 $\sigma>0$，使得

$$|\tau|\leqslant\sigma,\ \|y\|\leqslant\sigma\Rightarrow\begin{cases}|\Theta(y,\tau,t)|<\beta\|y\|;\\ |A_s(y_1,\cdots,y_{n-1},\tau,t)|<\gamma\|y\|,\\ \quad\gamma<\varDelta/8(n-1),\ s=1,\cdots,n-1;\\ \dot V<-\dfrac{3}{2}\varDelta\|y\|^2.\end{cases}$$

于是，由 $\dot V=2\sum\limits_{s=1}^{n-1}y_s\left(\sum\limits_{l=1}^{n-1}a_{sl}y_l\right)+2\sum\limits_{s=1}^{n-1}y_sA_s$，可得

$$2\sum_{s=1}^{n-1}y_s\left(\sum_{l=1}^{n-1}a_{sl}y_l\right)<-\frac{5\varDelta}{4}\|y\|^2.$$

作变量代换

$$\eta_s=e^{\lambda t}y_s,\quad s=1,\cdots,n-1,\tag{5.16}$$

其中 $\lambda>0$ 是充分小的常数．系统(5.11)的末 $(n-1)$ 个方程可改写成

$$\frac{d\eta_s}{dt}=a_{s,1}(t)\eta_1+\cdots+[a_{s,s}(t)+\lambda]\eta_s+\cdots+a_{s,n-1}(t)\eta_{n-1}$$
$$+e^{\lambda t}A_s(e^{-\lambda t}\eta_1,\ \cdots,\ e^{-\lambda t}\eta_{n-1},\ \tau,\ t),$$

$$s=1, \cdots, n-1.$$

利用这方程，从 $V(\eta_1, \cdots, \eta_{n-1})$ 求 $\dot{V}$，得

$$\dot{V}=2\sum_{s=1}^{n-1}\eta_s\left(\sum_{l=1}^{n-1}a_{sl}\eta_l\right)+2\lambda V(\eta_1, \cdots, \eta_{n-1})$$

$$+2e^{\lambda t}\sum_{s=1}^{n-1}\eta_s A_s(e^{-\lambda t}\eta_1, \cdots, e^{-\lambda t}\eta_{n-1}, \tau, t).$$

所以，当 $|\tau|\leqslant\sigma$, $\left[\sum_{l=1}^{n-1}\eta_l^2\right]^{1/2}\leqslant\sigma$, $t\geqslant0$，由上述结果可得

$$\dot{V}<-\Delta V+2\lambda V.$$

取 λ 使满足 $0<\lambda<\Delta/4$，则有

$$\dot{V}<-\frac{\Delta}{2}V\leqslant0. \tag{5.17}$$

现考虑系统(5.11)满足初始条件

$$t=0, \ \tau=\tau_0, \eta_s=\eta_{s0} \quad (s=1, \cdots, n-1)$$

的解$\left(这里, |\tau_0|<\delta, \left[\sum_{l=1}^{n-1}\eta_{l0}^2\right]^{1/2}<\delta, 0<\delta<\sigma\right)$，此解至少在 $t=0$ 的某邻域内满足不等式

$$|\tau(t)|\leqslant\sigma, \left[\sum_{l=1}^{n-1}\eta_l^2(t)\right]^{1/2}\leqslant\sigma.$$

设 $\hat{t}$ 是使上列不等式成立之区间之右端点，于是沿此解，在 $(0, \hat{t})$ 内有

$$\frac{dV}{dt}<0.$$

由此可见

$$V(\eta_1, \cdots, \eta_{n-1})=V(\eta_{1,0}, \cdots, \eta_{n-1,0})+\int_0^t\frac{dV}{dt}dt$$

$$\leqslant V(\eta_{1,0}, \cdots, \eta_{n-1,0}),$$

从而

$$\left[\sum_{l=1}^{n-1}\eta_l^2(t)\right]^{1/2}<\delta, \quad t\in(0, \hat{t}). \tag{5.18}$$

但 $\eta_s=e^{\lambda t}y_s$, $s=1, \cdots, n-1$，所以

$$\|y(t)\|<\delta e^{-\lambda t}, \quad t\in(0, \hat{t}).$$

另外，因 $|\Theta(y, \tau, t)|<\beta\|y\|$，故

$$|\Theta(y(t), \tau, t)|<\beta\delta e^{-\lambda t}, \quad t\in(0, \hat{t}).$$

由系统(5.11)第一个方程得

$$\tau(t)=\tau_0+\int_0^t\Theta(y(t), \tau, t)dt,$$

于是

$$|\tau(t)|<|\tau_0|+\beta\delta\int_0^t e^{-\lambda t}dt=|\tau_0|+\frac{\beta\delta(1-e^{-\lambda t})}{\lambda}$$

$$<|\tau_0|+\frac{\beta\delta}{\lambda}, \quad t\in(0, \hat{t}).$$

任取 E, $0<E<\sigma$, 又在不等式 $|\tau_0|<\delta$, $\left[\sum_{l=1}^{n-1}\eta_{l0}^2\right]^{1/2}<\delta$ 中取 δ 满足

$$\left(1+\frac{\beta}{\lambda}\right)\delta<E,$$

则有

$$|\tau(t)|<|\tau_0|+\frac{\beta\delta}{\lambda}<E, \quad t\in(0, \hat{t}). \tag{5.19}$$

以下要证明不等式(5.18), (5.19)对 $t\in\mathbb{R}_+^1=[0, \infty)$亦成立.

事实上，若不然，则 $\exists t^*>0$, 使

$$|\tau(t)|<E, \ \left[\sum_{l=1}^{n-1}\eta_l^2(t)\right]^{1/2}<\delta, \ \forall t\in[0, t^*).$$

但在 t^*, 这两不等式中至少有一个变为等式. 注意及 $\delta<E<\sigma$, 于是由 $\tau(t)$, $\eta_l(t)$, $l=1, \cdots, n-1$ 之连续性, $\exists t_1>t^*$ 使

$$|\tau(t)|\leqslant\sigma, \left[\sum_{l=1}^{n-1}\eta_l^2(t)\right]^{1/2}\leqslant\sigma, \quad \forall t\in[0, t_1].$$

于是类似于上述的推理可得

$$|\tau(t)|<E, \left[\sum_{l=1}^{n-1}\eta_l^2(t)\right]^{1/2}<\delta, \quad \forall t\in[0, t_1].$$

遂生矛盾.

因此，我们有

$$|\tau_0|<\delta,\ \|y_0\|<\delta \Rightarrow |\tau(t)|<E,\ \|y(t)\|<\delta e^{-\lambda t},\ \forall t\in R^1_+. \tag{5.20}$$

注意及坐标变换公式 (5.2) 及 $g_i(\theta)$, $\psi_{il}(\theta)$的性质, 可看出: $\|x_0-p\|$ 充分小时, $|\tau_0|$, $\|y_0\|$任意小; 而由上述 (5.20) 知, $|\tau_0|$, $\|y_0\|$ 微小时, $|\tau(t)|$, $\|y(t)\|$ 微小, 从而 $\|x-g(t, p)\|$ 微小; 换言之, $x=g(t, p)$是 Ляпунов 稳定的.

引理 1 的前半部分得证.

以下证明本引理的第二部分, 即不等式(5.1).

任取 $k>0$, 可以证明, 当 δ 充分小时, 沿上述的解, 有

$$\lim_{t\to\infty}\tau(t)=h,\quad |h|<k.$$

事实上, 取定 $E(E<\sigma,\ 0<E<k)$, 有

$$\lim_{t\to\infty}\tau(t)=\tau_0+\int_0^\infty \Theta(y(t),\ \tau,\ t)dt=\tau_0+h_1,$$

其中
$$h_1=\int_0^\infty \Theta(y(t),\ \tau,\ t)dt<\infty$$

$$(\text{因 } |\Theta(y(t),\ \tau,\ t)|<\beta\delta e^{-\lambda t}).$$

令 $h=\tau_0+h_1$, 有

$$|h|<|\tau_0|+\frac{\beta\delta}{\lambda}<E<k.$$

现来估计 $|h-\tau(t)|$, 我们有

$$|h-\tau(t)|<\int_t^\infty |\Theta(y(t),\ \tau,\ t)|dt<\beta\delta\int_t^\infty e^{-\lambda t}dt=\frac{\beta\delta}{\lambda}e^{-\lambda t}. \tag{5.21}$$

再选取 q (充分接近于 p), 使 $|\tau_0|<\delta$, $\left[\sum_{l=1}^{n-1}\eta_{l0}^2\right]^{1/2}<\delta$ 成立, 而且选 δ 使 $\left(1+\frac{\beta}{\lambda}\right)\delta<E$, $E\in(0, k)$. 因 $\theta=t+\tau$, 故由(5.2), 得

$$x_i(t)=g_i(t+\tau(t))+\sum_{l=1}^{n-1}\psi_{il}(t+\tau(t))y_l(t),\quad i=1,\ \cdots,\ n,$$

两边各减去 $g_i(t+h)$，其中 $h=\tau_0+h_1$，得

$$x_i(t)-g_i(t+h)=g_i(t+\tau(t))-g_i(t+h)$$
$$+\sum_{l=1}^{n-1}\psi_{il}(t+\tau(t))y_l(t),\ i=1,\ \cdots,\ n.$$

但 $g_i'(\theta)$，$\psi_{il}(\theta)$ 在 $\theta\geqslant 0$ 皆有界，故存在 $L_1>0$，使得

$$|x_i(t)-g_i(t+h)|\leqslant L_1|h-\tau(t)|+L_1\|y(t)\|,$$
$$i=1,\ \cdots,\ n,\ \forall t\geqslant 0.$$

注意及 $\|y(t)\|<\delta e^{-\lambda t}$，$|h-\tau(t)|<\dfrac{\beta\delta}{\lambda}e^{-\lambda t}$，故存在 $L>0$，使

$$\|g(t,\ q)-g(t+h,\ p)\|<L\delta e^{-\lambda t}.$$

(因 $x_i(t)$ 是 $g(t,\ q)$ 之各分量，$g_i(t+h)$ 是 $g(t+h,\ p)$ 之各分量.)故意选 $\delta<1/L$，即得

$$\|g(t,\ q)-g(t+h,\ p)\|<e^{-\lambda t},\ |h|<k.$$

是为不等式(5.1). ∎

引理 2 设定理 5.1 的条件(i)，(ii)成立，而且系统 (1.1) 存在解 $x=g(t,q)$ 满足 $\Gamma_q^+\subset\Sigma\subset D$($\Sigma$ 为闭区域)，则 D 内存在(1.1)的周期轨道.

证明 Γ_q^+ 是 Lagrange 稳定的，故 $\Omega_q\subset D$ 含有回复运动.(参见 Немыцкий-Степанов[8, 中文本，下册，p. 407 推论 2 及 p. 408 定理 27].)设此回复运动为 $g(t,\ p)$，$p\in\Omega_q$. 因回复运动必是 Poisson 稳定的，故 $g(t,\ p)$是 Poisson 稳定的. 另方面，Ω_q 是不变、闭集，所以 $\Gamma(p)$属于 D 内某闭域，从而由引理 1 知，不等式(5.1)成立.

于是，Плисс[25, p. 9, 定理 1.6]的假设条件成立(取 $\alpha(t)=e^{-\lambda t}$)，所以 $g(t,\ p)$是周期运动. ∎

由引理 1 看出，此周期轨道是渐近稳定的.

以下证明本节开始时列出的定理 5.1.

定理 5.1 的证明 先证存在性及稳定性. 任取 $p\in\bar{D}$，考虑 $g(t,\ p)$，于是 $\Omega_p\subset D$. 由引理 2 知，$\exists r\in\Omega_p$，使 $g(t,\ r)$ 为周期运

动，由引理 1 知它是 Ляпунов 稳定的。

至于唯一性，令 $A=\{q\in D|g(t,q)\to\Gamma(r),\ t\to\infty\}$，可看出 A 是开集。若 $A=D$，则唯一性得证。若 $A\neq D$，可引出矛盾如下。设 $p\in\partial A$，由 A 之定义知 $g(t,p)\in\partial A$，$\forall t\geqslant 0$，而且 ∂A 为闭集，于是按上述证明引理 2 的方法，可得：$\exists\hat{r}\in\partial A$，$g(t,\hat{r})$ 是周期运动，于是 $\Gamma(r)\cap\Gamma(\hat{r})=\emptyset$。但是由引理 1，$\Gamma(\hat{r})$ 的任一充分小邻域的轨道当 $t\to\infty$ 时趋于 $\Gamma(\hat{r})$，从而 $\hat{r}\notin\partial A$，遂生矛盾。 ∎

6. 周期轨道的稳定性

本章讨论 n 维动力系统 (1.1) 的周期轨道的渐近稳定性. 先综述有关的基本事实，然后分别介绍 Franke 与 Selgrade[110] 利用大范围分析和计算机的研究方法，以及 Churchill, Selgrade [111]对 Poincaré 稳定准则所作的推广.

6.1 周期轨道的渐近稳定性

考虑 n 维动力系统 (1.1) 所确定的动力流 g^t. 设 $\gamma\subset M\subset\mathbb{R}^n$ 是此动力流的周期轨道(即非常数周期解在相空间的轨道). 我们说 γ 是渐近稳定的，如果下列成立:

任取开集 $U_1\subset M(\gamma\subset U_1)$, 存在开集 U_2, $\gamma\subset U_2\subset U_1$, 使得

$$g^t(U_2)\subset U_1,\ \forall t>0;$$

$$\lim_{t\to\infty} d(g^t(x),\ \gamma)=0,\ \forall x\in U_2.$$

我们有下列基本事实:

(i) 设 γ 是系统(1.1)的周期轨道(周期为 T), $p\in\gamma$, 线性映射 $Dg^T(p)$ 有 $n-1$ 个特征根 σ_i 满足 $|\sigma_i|<1$, 则 γ 是渐近稳定的.

(ii) $Dg^T(p)$ 的特征根的性质与 $p\in\gamma$ 无关. 事实上，若另取

$q\in\gamma$, 令 $\tau\in\mathbb{R}^1$, 使 $g^\tau(p)=q$, 则

$$Dg^T(p)=D(g^{-\tau}\circ g^T\circ g^\tau)(p)$$
$$=[Dg^\tau(p)]^{-1}Dg^T(q)Dg^\tau(p),$$

即 $Dg^T(p)$ 与 $Dg^T(q)$ 相似. 另外, 1 必是 $Dg^T(p)$ 的特征根, 因为

$$Dg^T(p)F(p)=F(p).$$

(iii) $Dg^t(x)$ 满足

$$\dot{V}=DF(x)V,\ Dg^0(x)=I.$$

按 Floquet 理论, 若 $g^t(x)$ 是周期轨道 γ 的表示式, 则 $Dg^t(x)=K(t)\exp(\Delta t)$, $K(t+T)=K(t)$, Δ 为常阵, 特别地 $Dg^T(x)=\exp(\Delta T)$. $\exp(\Delta T)$ 的特征根 σ_1, …, σ_n 叫做周期轨道 γ 的特征根, 相应的 $\frac{1}{T}\log\sigma_j$, $j=1$, …, n, 叫做 γ 的特征指数.

(iv) 设 γ 是(1.1) 的周期轨道, $p\in\gamma$, 取 γ 在 p 的无切集 S (见 3.5 节), 定义 γ 的 Poincaré 映射

$$P:S\supset S_0\to S,\ P(x)=g^{d(x)}(x).$$

则 γ 的特征根 σ_j, $j=1$, …, n, 中有一个为 1, 例如说 $\sigma_n=1$, 而 σ_j, $j=1$, …, $n-1$, 是 Poincaré 映射 P 在 $x=p$ 处的 Jacobi 阵的特征根. 如果在 $\mathbb{R}^n$ 中特意选取坐标系, 使 $F(p)=(0,\cdots,0,1)$, S 所在的子空间为 $x_n=0$, 则 $Dg^T(p)=\exp(\Delta T)$ 的最末一列为 $(0,\cdots,0,1)^T$, 而且在 $\exp(\Delta T)$ 中去掉末行末列所得的 $(n-1)\times(n-1)$ 阵就是 Poincaré 映射 P 在 $x=p$ 处的 Jacobi 阵.

(v) 设 γ 是(1.1)的周期轨道, 周期为 T. 则有

(甲) γ 至少有一特征指数具负实部 $\Leftrightarrow$ 存在 (1.1) 的解 $x=x(t)$ (异于 γ) 满足 $\lim\limits_{t\to\infty}d(\gamma,x(t))e^{\varepsilon t}=0$, $\varepsilon>0$.

(乙) γ 恰有 $k(\leqslant n-1)$ 个特征指数具负实部, 则满足(甲)中所列极限性质的解构成一个 $k+1$ 维 C^1 流形 $\mathscr{S}$.

(丙) 若 γ 至少有一个特征指数具正实部, 则 γ 不是轨道稳定的.

(丁) 若(乙)中的 k 满足 $0<k<n-1$, 又有 $(n-1)-k$ 个特征指数具正实部, 则 $k+1$ 维流形 $\mathscr{S}$ 可表述为

$$\mathscr{S}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x=x(t),\ \lim_{t\to\infty} d(\gamma,\ x(t))=0\},$$

叫做 γ 的稳定流形; 相应于 $(n-1)-k$ 个具正实部的特征指数, 有 $(n-k)$ 维流形

$$\mathscr{U}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x=x(t),\ \lim_{t\to-\infty} d(\gamma,\ x(t))=0\},$$

叫做 γ 的不稳定流形(这里 $x=x(t)$ 是(1.1)的解).

这些基本事实的证明, 参见 Hartman[6] 及 Hirsch 与 Smale [7].

6.2 Franke-Selgrade 方法

上节介绍的方法虽然很重要, 但因需要知道解的有关资料, 所以不容易运用.

Franke 和 Selgrade[110] 借助大范围分析和数值分析的方法, 使用计算机处理这个问题. 他们证明了一个充分条件, 用以决定集合 $U\subset\mathbb{R}^n$($U\neq\emptyset$, 开, 连通, 其闭包 $\bar{U}$ 紧致) 内存在连通的吸引子 (见 [110] 第 3 节的命题 3.1 及其推论), 并且提供一充分条件, 用以保证某不变集是周期轨道或休止点(其非平凡特征指数均具负实部). 这就是[110]第 3 节中的命题 3.3 及其推论以及定理 3.5.

考虑系统(1.1), 即

$$\dot{x}=F(x),$$

并设 $M=\mathbb{R}^n$, 且(1.1)具有闭轨道 γ. 以下介绍 [110] 所证明的, 保证 γ 的非平凡特征指数均具负实部的充分条件.

如第一章中所述, 系统 (1.1) 确定了动力流 $g^t: x\mapsto g(t,\ x)$, $g^0(x)=x$, $\frac{d}{dt}g^t(x)|_{t=s}=F(g^s(x))$. $\{g^t(x)\mid t\in\mathbb{R}^1\}$ 称为过 x 的

轨道. 若 $x\in\mathbb{R}^n$, $F(x)=0$, 则 $g^t(x)=x$, $\forall t\in\mathbb{R}^1$, x 叫做 g^t 的休止点; 若 x 不是 g^t 的休止点, 而且 $\exists T>0$, 使 $g^T(x)=x$, 则 x 叫做 g^t 的周期点.

系统(1.1)决定了下列 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上常微系统

$$\dot{x}=F(x),\ \dot{v}=DF(x)v, \tag{6.1}$$

其中 $DF(x)$是 F 在 x 的 Jacobi 阵, $(x,\ v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. 对应于初值 $(x,\ v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 的解为 $\Psi^t(x,\ v)=(g^t(x),\ Dg^t(x)v)$, 其中 $g^t(x)$ 是(1.1)的解, 而 $Dg^t(x)$是 g^t 在 x 之 Jacobi 阵. Ψ^t 称为切流. 若 x 是 g^t 的一个周期点, 则 (6.1) 的第二个方程是周期系数线性系统, 这时可用 Floquet 理论寻找特征指数(Hartman[6]). 不过这需要知道周期轨道之方程. 一般说来, 这是很少见的情形. 为了获得特征指数的材料, 我们考虑解 $Dg^t(x)v$ 在 $g^t(x)$处与向量场正交的分量. 为此, 先引入下列一些概念和记号.

设 $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ 是 g^t 的不变集合, 对每个 $x\in\Lambda$, $F(x)$决定了 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 的两个子空间

切子空间 $E_x=\{(x,\ v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\,|\,v=\alpha F(x),\ \alpha\in\mathbb{R}^1\}$,

法子空间 $N_x=\{(x,\ v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\,|\,\langle v,\ F(x)\rangle=0\}$,

这里 $\langle\cdot;\cdot\rangle$表示 $\mathbb{R}^n$ 的普通内积.

令

$$E=\bigcup_{x\in\Lambda}E_x,\ N=\bigcup_{x\in\Lambda}N_x.$$

设 $\theta_x:\{x\}\times\mathbb{R}^n\to N_x$ 为 $\{x\}\times\mathbb{R}^n$ 到 N_x 的正交投射, 即

$$\theta_x(x,\ v)=(x,\ \pi_x(v)),$$

其中
$$\pi_x(v)=\begin{cases}0, & \text{当 } F(x)=0,\\ v-\dfrac{\langle v,\ F(x)\rangle F(x)}{\langle F(x),\ F(x)\rangle}, & \text{当 } F(x)\neq0,\end{cases}$$

以下常把 π_x 的附标省略, 记为 π, 以简化符号. 我们有

引理 1(Franke-Selgrade [110]) 设 Λ 是 g^t 的紧致不变集合, 又存在 $T>0$ 使不等式

$$\|\pi(Dg^T(x)w)\|<1,\ \forall x\in\Lambda,\ (x,\ w)\in N_x,\ \|w\|=1$$

成立，则 $\exists\beta>1$，使

$$\|\pi(Dg^{-T}(x)v)\|\geqslant\beta\|\pi(v)\|,\quad \forall(x,\ v)\in\Lambda\times\mathbb{R}^n. \tag{6.2}$$

证明 若$(x,\ v)\in E_x$，则不等式(6.2)两端均为零，这是平凡情形(因在切流作用下，E是不变集合)．若$(x,\ v)\notin E_x$，则$\pi(v)\in N_x$非零．由紧致性知，$\exists\alpha\in(0,\ 1)$使

$$\|\pi(Dg^T(x)w)\|\leqslant\alpha,\quad \forall(x,\ w)\in N_x,\ \|w\|=1.$$

由映射$Dg^T(x)$的线性性质，有

$$\|\pi(Dg^T(x)w)\|\leqslant\alpha\|w\|,\ \forall(x,\ w)\in N_x. \tag{6.3}$$

考虑$(g^{-T}(x),\ Dg^{-T}(x)v)$，令$Y=Dg^{-T}(x)v$，有

$$Y-\pi(Y)=\frac{\langle Y,\ F(g^{-T}(x))\rangle F(g^{-T}(x))}{\langle F(g^{-T}(x)),\ F(g^{-T}(x))\rangle},$$

从而$(g^{-T}(x),Y-\pi(Y))\in E_{g^{-T}(x)}$，$(x,Dg^T(g^{-T}(x))(Y-\pi(Y)))\in E_x$．现欲对$\|\pi(Dg^T(g^{-T}(x))\pi(Y))\|$应用(6.3)．先检查$(g^{-T}(x),\ \pi(Y))$是否属于$N_{g^{-T}(x)}$．这是成立的；事实上，

$$\pi(Y)=Y-\langle Y,F(g^{-T}(x))\rangle F(g^{-T}(x))/\langle F(g^{-T}(x),\ g^{-T}(x)\rangle$$
$$\Rightarrow\langle\pi(Y),\ F(g^{-T}(x))\rangle=0.$$

于是由(6.3)得

$$\|\pi(Dg^T(g^{-T}(x))\pi(Y))\|\leqslant\alpha\|\pi(Y)\|.$$

但是，$Dg^T(g^{-T}(x))Y=v$，$\pi(v)=\pi(Dg^T(g^{-T}(x))\pi(Y))$，所以

$$\|\pi(v)\|\leqslant\alpha\|\pi(Y)\|=\alpha\|\pi(Dg^{-T}(x)v)\|,$$

从而 $\|\pi(Dg^{-T}(x)v)\|\geqslant\beta\|\pi(v)\|$， 其中 $\beta=1/\alpha>1$． ∎

反复运用不等式(6.2)可得

推论 设Λ是g^t的紧致不变集合．设存在$T>0$，使得

$$\|\pi(Dg^T(x)w)\|<1,\ \forall x\in\Lambda,\ (x,\ w)\in N_x,\ \|w\|=1.$$

则集合$\{\|\pi(Dg^t(x)v)\|\,|\,t\leqslant0\}$无界，$\forall(x,\ v)\in\Lambda\times\mathbb{R}^n-E$．

定理 6.1 (Franke-Selgrade[110]) 设γ是g^t的周期轨道，对某$x_0\in\gamma$，集合

$$\{\|\pi(Dg^t(x_0)v)\|\,|\,t\leqslant0\}$$

无界, $\forall(x_0, v)\in\gamma\times\mathbb{R}^n-E$. 则 γ 的非平凡特征指数均具负实部, 从而 γ 是渐近稳定的.

证明 按 Hartman[6, p. 253], 取 $x_0\in\gamma$, 取 γ 在 x_0 的法平面为无切截面, 又适当选择坐标系使 $F(x_0)=(0, \cdots, 0, 1)^T$, 于是 $(x_0, \eta)\in\gamma\times\mathbb{R}^n-E$, 其中 $\eta=(\eta_1, \cdots, \eta_{n-1}, 0)^T\in\mathbb{R}^n$, $\eta_j\in\mathbb{R}^1$. 由假设知, 集合 $\{\|\pi(Dg^t(x_0)\eta)\| \mid t\leqslant 0\}$ 无界. 注意及

$$\begin{aligned}\pi(Dg^t(x_0)\eta)&=Dg^t(x_0)\eta-\frac{\langle Dg^t(x_0)\eta,\ F(x_0)\rangle F(x_0)}{\langle F(x_0),\ F(x_0)\rangle}\\&=Dg^t(x_0)\eta-(Dg^t(x_0)\eta)_n(0, \cdots, 0, 1)^T\\&=\sum_{j=1}^{n-1}\eta_j h_j,\end{aligned}$$

其中 h_j, $j=1, \cdots, n-1$, 为 $Dg^t(x_0)$ 第 j 列去掉第 n 元所得的 $(n-1)$维列向量. 因此, 集合 $\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n-1}\eta_j h_j\right\| \,\middle|\, t\leqslant 0\right\}$ 无界.

由 Hartman [6, p. 252] 知, $Dg^t(x_0)=K(t)e^{\Lambda t}$, $K(t)$ 为周期函数, 有界. 于是存在满秩常阵 Q, 使 $\Lambda=QJQ^{-1}$, J 为 Λ 的 Jordan 标准型, 从而 $Dg^t(x_0)=K(t)Qe^{Jt}Q^{-1}$, $Dg^t(x_0)Q=K(t)Qe^{Jt}$. $\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n-1}\eta_j h_j\right\| \,\middle|\, t\leqslant 0\right\}$ 无界 $\Rightarrow Dg^t(x_0)Q$ 第 j 列($j=1, \cdots, n-1$)之模无界 ($t\leqslant 0$)$\Rightarrow e^{Jt}$ 的第 j 列 ($j=1, \cdots, n-1$) 之模无界($t\leqslant 0$)$\Rightarrow \Lambda$ 有 $n-1$ 特征根 σ_j 满足 $\mathrm{Re}(\sigma_j)<0\Rightarrow Dg^T(x_0)=e^{\Lambda T}$ 之特征根 $\{\mu_j\}$ 有 $n-1$ 个满足 $|\mu_j|<1$(T 为 γ 的周期). $\Rightarrow\gamma$ 的非平凡特征指数均具负实部. ∎

因此, 由上述引理 1 及其推论可见, 若系统 (1.1) 的周期轨道 γ(设其周期为 $T>0$)满足下列条件:

$$\|\pi(Dg^T(x_0)w)\|<1,\ x_0\in\gamma,\ (x_0,\ w)\in N_{x_0},\ \|w\|=1,$$

则 γ 是渐近稳定的.

Franke 与 Selgrade[110] 以方程

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=\alpha(1-x^2-y^2)y-x\end{cases}\tag{6.4}$$

(取 $\alpha=0.05$)为例，示范如何用计算机实施上述思想，证明此系统之周期轨道是渐近稳定的．其梗概如下：

首先用计算机及 [110] 的"推论 3.2"证明圆环域 $U(0.99, 1.01)$ (以原点为中心，内半径为 0.99，外半径为 1.01) 含有一极引子；并算出 $U(0.99, 1.01)$ 的两边界圆，在 (6.4) 的动力流作用下，于时刻 $T=0.64$ 进入了 $U(0.99, 1.01)$ 之内．据该文介绍，他们在 IBM 360 计算机上，采用 PL/1 程序，运用五阶 Taylor 方法(步长为 0.04，共 16 步)，初值取在 $\partial U(0.99, 1.01)$，证实 $\partial U(0.99, 1.01)$ 在动力流 $g^{0.64}$ 作用下被映入 $U(0.99, 1.01)$ 之内，所需计算时间为 2 分 14 秒．

然后考虑(6.4)派生的 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ 上微分系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=\alpha(1-x^2-y^2)y-x,\\ \dot{u}=v,\\ \dot{v}=(-2\alpha xy-1)u+\alpha(1-x^2-y^2)v-2\alpha y^2v,\end{cases}\tag{6.5}$$

其中 $(x, y, u, v)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ (此系统即(6.1)对应于(6.4)的情形)．对于每 $(x, y)\in U(0.99, 1.01)$，$(x, y, u, v)\in N_{(x,y)}$，$\|(u, v)\|=1$，用计算机证实 $\left\|\pi\left(Dg^{0.64}(x, y)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\right)\right\|<1$．详情见[110]的第 5 节．于是方程(6.4)的周期轨道是渐近稳定的．

6.3 Poincaré 稳定性准则的推广

Churchill-Selgrade [111] 把下列著名的 Poincaré 准则推广到 n 维情形：

Poincaré 准则 设 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是 C^1 向量场，设 $\gamma:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^2$ 是 F 的周期轨道，若

$$\int_\gamma \operatorname{div}(F)<0,$$

则 γ 是渐近稳定的。(参见 Coddington & Levinson[4], Hale[5], Hartman[6].)

考虑动力系统 (1.1) 及其确定的动力流 g^t, 切流 Ψ^t, 如上节所述, 引入一些记号:

$p\in\mathbb{R}^n$, 简记 $g^t(p)$ 为 $p\cdot t$; $(p, w)\in T(\mathbb{R}^n)$, 简记 $Dg^t(p)w$ 为 $w:t$, 这里 $T(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 之切丛; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 仍记 $\mathbb{R}^n$ 的普通内积; 用 $T^1(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的单位球丛, 即 $T^1(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n\times S^{n-1}$; 而 $T^1_p(\mathbb{R}^n)=\{p\}\times S^{n-1}$; $E^\perp$ 表示 $E\subset T(\mathbb{R}^n)$的正交补丛. 于是可陈述 [111] 的主要结果:

定理 6.2(Churchill-Selgrade[111]) 设 $\gamma\subset\mathbb{R}^n$ 是 g^t 的周期轨道, 令 $E=\bigcup\limits_{x\in\gamma}E_x$, 对于 $p\in\gamma$, $(p, w)\in E^\perp\cap T^1_p(\mathbb{R}^n)$, $t\in\mathbb{R}^1$, 定义

$$
\begin{aligned}
V(t)&=V(p, w; t)\\
&=\langle F(p\cdot t), F(p\cdot t)\rangle\langle w:t, w:t\rangle-\langle F(p\cdot t), w:t\rangle^2.
\end{aligned}
$$

若存在 $s<0$ 及连续函数 $(p, w)\mapsto\varepsilon(p, w)>0$, $(p, w)\in E^\perp\cap T^1_p(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$
V(p, w; t)>V(p, w; 0)+\varepsilon(p, w),\ \forall t\leqslant s. \tag{6.6}
$$

则 γ 的非平凡特征指数均具负实部, 从而 γ 是渐近稳定的.

[注 1] $\dot V<0\Rightarrow$(6.6)成立, 故往往先检查此条件.

[注 2] $V(p, w; t)=|(w:t)^\perp|^2|F(p\cdot t)|^2$, 其中 $(w:t)^\perp=(w:t)-\langle(w:t), F(p\cdot t)\rangle F(p\cdot t)/\langle F(p\cdot t), F(p\cdot t)\rangle$. 事实上, $p\in\gamma$, $F(p\cdot t)\neq 0$, 故

$$
V(p, w; t)=\|F(p\cdot t)\|^2\left\{\langle w:t, w:t\rangle-\frac{\langle F(p\cdot t), w:t\rangle^2}{\|F(p\cdot t)\|^2}\right\},
$$

但

$$
\begin{aligned}
\|(w:t)^\perp\|^2&=\langle w:t, w:t\rangle-2\frac{\langle w:t, F(p\cdot t)\rangle^2}{\|F(p\cdot t)\|^2}+\frac{\langle w:t, F(\ \cdot t)\rangle^2}{\|F(p\cdot t)\|^2}\\
&=\langle w:t, w:t\rangle-\frac{\langle F(p\cdot t), w:t\rangle^2}{\|F(p\cdot t)\|^2}.
\end{aligned}
$$

由上述表示式知, $V>0$.

[注 3] 当 $n=3$ 时,

$$V(t)=\|F(p\cdot t)\times(w:t)\|^2,$$

其中×表示R^3的普通向量积．事实上，按定义得

$$V(t)=\|F(p\cdot t)\|^2\|w:t\|^2-(F(p\cdot t),\ w:t)^2=\|F(p\cdot t)\times(w:t)\|^2$$

$(\because\ a^2b^2-(a\cdot b)^2=\|a\times b\|^2)$.

［注4］当$n=2$时，有

$$\dot V=2\operatorname{div}(F)V,$$

从而
$$V(t)=V(0)e^{2\int_0^t \operatorname{div}(F)}.$$

事实上，$n=2$时

$$V(t)=(F_1w_2-F_2w_1)^2,$$

其中$F_i=F_i(p\cdot t)$, $w_i=(w:t)_i$, $i=1,\ 2$. 注意及

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}=\frac{d}{dt}(Dg^t(p)w)=DF(g^t(p))w$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix},$$

$$\dot V=\frac{d}{dt}(F_1w_2-F_2w_1)^2$$

$$=2(F_1w_2-F_2w_1)\left\{\frac{dF_1}{dt}w_2+F_1\frac{dw_2}{dt}-\frac{dF_2}{dt}w_1-F_2\frac{dw_1}{dt}\right\},$$

而
$$\frac{dF_i}{dt}=\frac{\partial F_i}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F_i}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial F_i}{\partial x}F_1+\frac{\partial F_i}{\partial y}F_2,$$

所以$\dot V=2\operatorname{div}(F)(F_1w_2-F_2w_1)^2=2\operatorname{div}(F)V$.

［注5］当$n=2$时，此定理蕴涵古典的 Poincaré 准则．事实上，设γ是二维动力系统$\dot x=F(x)$, $x\in R^2$的周期轨道，其最小正周期为$T>0$．又设

$$\int_0^T \operatorname{div}(F)=\rho<0.$$

令
$$M=\inf\{e^{-2\int_0^s \operatorname{div}(F)}\ |0\leqslant s\leqslant T\},$$

$M>0$．对于$t<0$，令$k=k(t)=[-t/T]$．于是由

$$V(t)=V(0)e^{2\int_0^t \operatorname{div}(F)}$$

推出

$$V(t)=V(0)e^{-2\int_t^0 \operatorname{div}(F)}$$
$$=V(0)e^{-2\int_t^{-kT}\operatorname{div}(F)-2\int_{-kT}^0 \operatorname{div}(F)}\geqslant V(0)Me^{2k\rho}.$$

当$t\to-\infty$, $k\to\infty$，故条件(6.6)成立，由定理6.2即得γ渐近稳定，从而导出 Poincaré 准则．

定理6.2的证明依赖于6.2节的定理6.1(Franke-Selgrade), 即:

若 $\forall p\in\gamma$, $\forall(p, w)\in T_\gamma(\mathbb{R}^n)-E$, 集合 $\{\|(w:t)^\perp\|\,|\,t\leqslant 0\}$ 无界, 则 γ 的非平凡特征指数均具负实部, 从而 γ 是渐近稳定的.

证明定理6.2的计划是: 设法证明条件(6.6) $\Rightarrow\{\|(w:t)^\perp\|\,|\,t\leqslant 0\}$ 无界, $\forall(p, w)\in T_\gamma(\mathbb{R}^n)-E$.

定理6.2的证明 不失一般性, 可仅考虑 $(p, w)\in E_1^\perp$, 其中

$$E_1^\perp=\{(p, w)\in T_\gamma(\mathbb{R}^n)\,|\,\|w\|=1,\ w\in E^\perp\}.$$

理由是: E 在 $Dg^t(p)$ 作用下是不变集合, $Dg^t(p)$ 是线性映射. 任取 $(p, w)\in T_\gamma(\mathbb{R}^n)-E$, 分解 $w=w^\perp+w_E$, $w^\perp\in E^\perp$, $w_E\in E$, 有 $(w:t)^\perp=(w^\perp:t)^\perp+(w_E:t)^\perp=(w^\perp:t)^\perp$. 另外, 对于 $w\neq 0$, $Dg^t(p)w=\|w\|Dg^t(p)\dfrac{w}{\|w\|}$. 因此, 若 $\{\|\pi(Dg^t(p)w)\|\,|\,t\leqslant 0\}$ 无界, $\forall(p,w)\in E_1^\perp$, 则 $\{\|\pi(Dg^t(p)w)\|\,|\,t\leqslant 0\}$ 无界, $\forall(p, w)\in T_\gamma(\mathbb{R}^n)-E$.

取定 $p\in\gamma$, 有 $E_1^\perp\subseteq T_p(\mathbb{R}^n)\cap E^\perp$. 由条件(6.6), 可选取 $(p, w)\in E_1^\perp$ 的某开邻域 $N\subset E_1^\perp$ 及常数 $s>0$, 使得

$$V(q, y; t)>V(q, y; 0)+\varepsilon,\ \forall(q, y)\in N,\ t\leqslant s. \quad (6.7)$$

另方面, 由于 $F\in C^1$, 可设(必要时把邻域 N 缩小些)

$$\|F(q)\|^2>\|F(r)\|^2-(\varepsilon/2),\ \forall q,\ r\in \Pi(N), \quad (6.8)$$

其中 $\Pi:T(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$ 为投射. 任取 $q\in\Pi(N)$, 若 $\exists t<s$, 使得 $q\cdot t\in\Pi(N)$, 则(6.8)$\Rightarrow$

$$\|F(q)\|^2>\|F(q\cdot t)\|^2-(\varepsilon/2). \quad (6.9)$$

因此, 取 $(q, y)\in E_1^\perp$, 由上面的注2(即 $V(p, w; t)=\|(w:t)^\perp\|^2\|F(p\cdot t)\|^2$)及(6.7)可得

$$\|(y:t)^\perp\|^2\|F(q\cdot t)\|^2>\|(y:0)^\perp\|^2\|F(q\cdot 0)\|^2+\varepsilon,$$

即
$$\|(y:t)^\perp\|^2\|F(q\cdot t)\|^2>\|y^\perp\|^2\|F(q)\|^2+\varepsilon.$$

但 $\|y^\perp\|=\|y\|=1$, 由(6.8), (6.9)得

$$\|(y:t)^{\perp}\|^2\|F(q\cdot t)\|^2>\|F(q)\|^2+\varepsilon>\|F(q\cdot t)\|^2+\varepsilon/2. \tag{6.10}$$

因$(q,\ y)\in E_1^{\perp}$，故 $F(q)\neq 0$，$F(q\cdot t)\neq 0$，从而

$$\|(y:t)^{\perp}\|^2>1+\varepsilon/2\|F(q\cdot t)\|^2.$$

令 $K=\sup\{\|F(x)\|^2|x\in H(N)\}$（可设 $K<\infty$，必要时再缩小 N 即可），于是

$$\|(y:t)^{\perp}\|^2>1+\varepsilon/2K^2\triangleq\beta>1, \tag{6.11}$$

其中 β 与$(q,\ y)\in N$ 无关.

由于γ是周期轨道，故可选取序列 $\{t_j\}$，$t_j\downarrow-\infty$，$t_1<s$，$t_{j+1}<t_j+s$，$j\geqslant 1$，使得 $p\cdot t_j\in H(N)$，于是由(6.11)推出

$$\begin{aligned}\|(w:t_{j+1})^{\perp}\|^2&=\|((w:t_j):(t_{j+1}-t_j))^{\perp}\|^2\\&=\|((w:t_j)^{\perp}:(t_{j+1}-t_j))^{\perp}\|^2\\&=\left\|\left(\left(\frac{(w:t_j)^{\perp}}{\|(w:t_j)^{\perp}\|}\right):(t_{j+1}-t_j)\right)^{\perp}\right\|^2\|(w:t_j)^{\perp}\|^2\\&>\beta\|(w:t_j)^{\perp}\|^2,\quad j=1,\ 2,\ \cdots.\end{aligned}$$

如此递推下去，可得

$$\|(w:t_{j+1})^{\perp}\|^2>\beta^{j+1}\|w\|=\beta^{j+1}.$$

因 $\beta>1$，故 $\{\|(w:t)^{\perp}\|\,|t\leqslant 0\}$ 无界. ∎

从上述证明可以预测到下列保证集合

$$\{\|(w:t)^{\perp}\|\,|t\leqslant 0\}$$

无界的另一个充分条件.

定理 6.3（Churchill-Selgrade [111]） 设对每个$(p,\ w)\in E_1^{\perp}$，$\exists\delta>0$ 及序列 $\{t_j\}$，$t_j\downarrow-\infty$，使得

（甲） $\|F(p\cdot t_j)\|^2>\|F(p\cdot t_{j+1})\|^2-(\delta/2)$；

（乙） $V(p\cdot t_j,y;\ t_{j+1}-t_j)>V(p\cdot t_j,y;\ 0)+\delta,\forall(p\cdot t_j,y)\in E_1^{\perp}$，

则集合 $\{\|(w:t)^{\perp}\|\,|t\leqslant 0\}$ 无界.

证明 $(p\cdot t_j,\ y)\in E_1^{\perp}$，连同假设（乙）和注 2 推出

$$\begin{aligned}&\|(y:(t_{j+1}-t_j))^{\perp}\|^2\|F((p\cdot t_j)\cdot(t_{j+1}-t_j))\|^2\\&\quad>\|(y:0)^{\perp}\|^2\|F((p\cdot t_j)\cdot 0)\|^2+\delta,\end{aligned}$$

即 $\|(y:(t_{j+1}-t_j))^\perp\|^2\|F(p\cdot t_{j+1})\|^2>\|F(p\cdot t_j)\|^2+\delta.$

由条件(甲)得

$$\|(y:(t_{j+1}-t_j))^\perp\|^2\|F(p\cdot t_{j+1})\|^2>\|F(p\cdot t_{j+1})\|^2+\delta/2.$$

令 $L=\sup\{\|F(x)\|^2|x\in\gamma\}$，可得

$$\|(y:(t_{j+1}-t_j))^\perp\|^2>1+\delta/2L\triangleq\mu>1.$$

由 $D\dot{g}^t$ 的线性性质知，

$$(y:(t_{j+1}-t_j))^\perp/\|y\|=\left(\frac{y}{\|y\|}:(t_{j+1}-t_j)\right)^\perp,$$

故

$$\|(y:(t_{j+1}-t_j))^\perp\|^2>\mu\|y\|^2=\mu\|y^\perp\|^2,\ \forall(p,\ y)\in E_1^\perp.$$

所以，

$$\|(w:t_{j+1})^\perp\|^2=\|((w:t_j)^\perp:(t_{j+1}-t_j))^\perp\|^2$$
$$>\mu\|(w:t_j)^\perp\|^2>\cdots>\mu^{j+1}.$$ ∎

$V(t)=V(p,\ w;\ t)$还有另一种表示式。例如，令

$$a=(a_1,\ \cdots,\ a_n)^T,$$

$$a_{ij}=(a_i,\ a_j)^T,$$

$$J=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},$$

则 $V(t)$ 可表成

$$V(p,\ w;\ t)=\sum_{\substack{i=1\\ i<j}}^{n-1}\langle(w:t)_{ij},\ -J(F(p\cdot t))_{ij}\rangle^2.$$

当 $n=3$ 时，沿系统 $\dot{x}=F(x)$，$\dot{w}=DF(x)w$ 的轨道，有

$$V(p,\ w;\ t)=V_1(p,\ w;\ t)+V_2(p,\ w;\ t)+V_3(p,\ w;\ t),$$

其中 $$V_1(p,\ w;\ t)=\langle(w:t)_{12},\ -J(F(p\cdot t))_{12}\rangle^2,$$

$$V_2(p,\ w;\ t)=\langle(w:t)_{13},\ -J(F(p\cdot t))_{13}\rangle^2,$$

$$V_3(p\cdot w;\ t)=\langle(w:t)_{23},\ -J(F(p\cdot t))_{23}\rangle^2.$$

可计算出 V_1, V_2, V_3 满足下列微分系统：

$$
\begin{cases}
\dot V_1 = 2V_1\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)+2\tilde V_1\tilde V_2\,\dfrac{\partial F_2}{\partial x_3}-2\tilde V_1\tilde V_3\,\dfrac{\partial F_1}{\partial x_3},\\
\dot V_2 = 2V_2\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_3}{\partial x_3}\right)+2\tilde V_2\tilde V_3\,\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}+2\tilde V_1\tilde V_2\,\dfrac{\partial F_3}{\partial x_2},\\
\dot V_3 = 2V_3\left(\dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial F_3}{\partial x_3}\right)+2\tilde V_2\tilde V_3\,\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}-2\tilde V_1\tilde V_3\,\dfrac{\partial F_3}{\partial x_1};
\end{cases}
\tag{6.12}
$$

其中 $\partial F_i/\partial x_j$ 是在 $p\cdot t$ 处之值，$\tilde V_j$，$j=1, 2, 3$ 是下列内积：

$$
\begin{aligned}
\tilde V_1 &= \langle (w:t)_{12},\ -J(F(p\cdot t))_{12}\rangle,\\
\tilde V_2 &= \langle (w:t)_{13},\ -J(F(p\cdot t))_{13}\rangle,\\
\tilde V_3 &= \langle (w:t)_{23},\ -J(F(p\cdot t))_{23}\rangle.
\end{aligned}
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
\dot V &= \dot V_1+\dot V_2+\dot V_3\\
&= [\tilde V_1\tilde V_2\tilde V_3]\begin{bmatrix} 2(F_{11}+F_{22}) & F_{23}+F_{32} & -(F_{13}+F_{31})\\ F_{23}+F_{32} & 2(F_{11}+F_{33}) & F_{12}+F_{21}\\ -(F_{13}+F_{31}) & F_{12}+F_{21} & 2(F_{22}+F_{33}) \end{bmatrix}\\
&\quad\times\begin{bmatrix}\tilde V_1\\ \tilde V_2\\ \tilde V_3\end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

其中 $F_{ij}=\partial F_i/\partial x_j$（在 $p\cdot t$ 处之值）。因此，若此二次型当 $p\in\gamma$ 是负定的，则有 $\dot V<0$，从而定理 6.2 之条件(6.6)成立，所以 γ 是渐近稳定的。换言之，若当 $p\in\gamma$ 时，下列条件成立，则 γ 渐近稳定：

$$
\begin{gathered}
F_{11}+F_{22}<0,\\
4(F_{11}+F_{22})(F_{11}+F_{33})-(F_{23}+F_{32})^2>0,\\
\det A<0,
\end{gathered}
$$

其中 A 为上述二次型中的对称阵。

动力系统(1.1)的周期轨道的稳定性，有时在讨论其唯一性时一齐解决，第 7 章给出具体例子。此外，还有一种处理周期轨道稳定性的技术，即采用流动标准正交系的方法。此方法在 Urabe

[112, 第 5 章] 及 Hale[5, 第 VI 章] 都有详述，其中 Hale[5] 所讲的比 Urabe 更广泛些.

设 $u:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^n$ 是周期函数(周期为 $\omega>0$), $u\in C^1(\mathbb{R}^1)$, $du(\theta)/d\theta\neq 0$, $\forall\theta\in\mathbb{R}^1$, $u:[0,\omega)\to\mathbb{R}^n$ 为 1-1 映射. 令

$$\Gamma=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x=u(\theta),\ \theta\in[0,\omega]\},$$

则 Γ 是一 Jordan 曲线, 沿 Γ 的流动标准正交系是指: $\mathbb{R}^n$ 的标准正交坐标系 $\{e_1(\theta),\ \cdots,\ e_n(\theta)\}$, $\theta\in[0,\omega]$, $e_j(\theta)$ 是 θ 的周期函数(周期为 ω), 而且 $e_j(\theta)$ 中有一个等于 $[du(\theta)/d\theta]/\|du(\theta)/d\theta\|$.

有关方法和结论可参考 Urabe[112] 和 Hale[5].

7. 应　　用

7.1 电子学方面的应用

7.1.1 一个描写真空管振荡电路的三维动力系统的周期轨道存在性

Friedrichs[30]在1946年首先用环区原理研究了一个三维动力系统的周期轨道的存在性问题．此系统来源于下列振荡电路(参考图8)，其中的三极管特征曲线由下列关系给定：

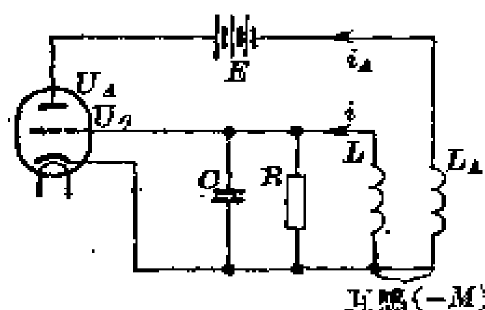


图 8

$$i_A=f(u_A+\mu u_G)=f(\hat{u}),$$

其中 $\hat{u}=u_A+\mu u_G$，μ 为放大系数．有关此特征曲线的性质，将在下面给出(参见对方程(7.2)中的 $j(s)$ 的规定和性质)．这电路的微分方程为

$$\begin{cases} L_A\dfrac{di_A}{dt}-M\dfrac{di}{dt}+u_A=E, \\ L\dfrac{di}{dt}-M\dfrac{di_A}{dt}+u_G=0, \\ C\dfrac{du_G}{dt}+R^{-1}u_G-i=0. \end{cases} \tag{7.1}$$

引入下列变量

$$\theta=\Delta^{-1}M(\mu-L^{-1}M)Rt,\ \Delta=L_AL-M^2,$$
$$u=(\mu-L^{-1}M)u_G,$$
$$r=(\mu-L^{-1}M)Ri,$$
$$s=\mu v_G+u_A-E,$$
$$j(s)=L^{-1}M(\mu-L^{-1}M)R[f(\mu v_G+u_A)-f(E)],$$
$$\alpha=CL^{-1}R^2,$$
$$\rho=\Delta/M(L\mu-M),$$

可把(7.1)改写成

$$\begin{cases} j'(s)\dfrac{ds}{d\theta}=u-s,\\ \dfrac{dr}{d\theta}=(1-\rho)u-s,\\ \alpha\dfrac{du}{d\theta}=-\rho u+\rho r. \end{cases}\tag{7.2}$$

其中 $j(s)$ 满足下列条件:

$$j(0)=0;$$
$$j'(s)>0;\ j'(s)\to 0\ (当\ |s|\to\infty);$$
$$j(s)\to j(\infty)<\infty,\ (当\ s\to\infty);$$
$$j(s)\to j(-\infty)>-\infty\ (当\ s\to-\infty).$$

另外，$0<\rho<1$, $\alpha>0$, $\rho\eta[(1-\rho)\eta-1]+\alpha(\eta-1)>0$, 其中 $\eta=j'(0)$.

$(0,0,0)$是(7.2)的奇点，(7.2)在此奇点的线性化方程为

$$\begin{cases} \eta\dfrac{ds}{d\theta}=u-s,\\ \dfrac{dr}{d\theta}=(1-\rho)u-s,\\ \alpha\dfrac{du}{d\theta}=-\rho u+\rho r. \end{cases}$$

$\rho\eta[(1-\rho)\eta-1]+\alpha(\eta-1)>0\Rightarrow$ 此线性方程的特征方程有一负特征根，其余两特征根具正实部.

为了应用环区原理证明(7.2)存在周期轨道，在相空间中构造环区 $\mathscr{T}=\mathscr{D}\backslash\mathscr{E}$，其中 $\mathscr{D}$ 为包含原点的连通区域，$\mathscr{E}$ 是原点的一邻域，使得(7.2)所定义的向量场在 $\mathscr{T}$ 满足定理3.1的条件．区域 $\mathscr{D}$ 的大致构造为：$\mathscr{D}=\bigcup_{k=1}^{4}\mathscr{C}_k$；$\forall k$，$\partial\mathscr{C}_k$ 由三部分组成："正门"、"侧门"和"出口"．(7.2)的向量场在"正门"或"侧门"处均指向 $\mathrm{Int}\mathscr{C}_k$，在"出口"处则指向 $\mathrm{Ext}\mathscr{C}_k$，而且自"正门"或"侧门"出发的轨道必走到"出口"上去．此外，$\mathscr{C}_1$ 的"出口"就是 $\mathscr{C}_2$ 的"正门"；$\mathscr{C}_2$ 的"出口"就是 $\mathscr{C}_3$ 的"正门"；$\mathscr{C}_3$ 的"出口"与 $\mathscr{C}_4$ 的"正门"一致；$\mathscr{C}_4$ 的"出口"与 $\mathscr{C}_1$ 的"正门"一致．这构造需要对(7.2)的向量场作细致的观察，Friedrichs [30] 说，他是在仔细研究了该向量场的一个硬纸模型后完成上述构造的．

$\mathscr{C}_k$ 的构造如下：

先作若干准备工作．令 $z=j(s)-r$，显然它满足 $\frac{dz}{d\theta}=\rho u$．又令 $h(u,z)=\alpha u^2+z^2$，并注意及 $\frac{dh}{d\theta}=-2\rho u(u-j(s))$．由 $j(s)$ 所满足的条件知，可选取常数 $J>0$，使得 $j(s)\leqslant J$，$\forall s\in\mathbf{R}^1$，$j'(s)\leqslant K$，$\forall s\in\{s\,|\,K|s|>J\}$．再取常数 $s_0>J$，使得 $z_0=s_0-j(s_0)>0$，$[h(s_0,z_0)-\alpha J^2]^{1/2}>2J$，$[h(s_0,z_0)-\alpha J^2]^{1/2}>(1+\alpha)J$，$\alpha s_0^2<h(J,[h(s_0,z_0)-\alpha J^2]^{1/2}-(1+\alpha)J)$ 成立．最末的不等式对于 $\mathscr{C}_k$ 的构造起决定作用．

考虑方程

$$h(u,u-j(s))=h(s_0,z_0),$$

其中 $h(s_0,z_0)=h(J,[h(s_0,z_0)-\alpha J^2]^{1/2})$，欲求满足 $U_+(s)\geqslant J$ 的解 $u=U_+(s)$．当 $u\geqslant J$ 时，此方程左方对每个固定的 s，是 u 的增函数，又因

$$\begin{aligned}h(J,J-j)\leqslant h(J,2J)<h(J,[h(s_0,z_0)-\alpha J^2]^{1/2})\\=h(s_0,z_0),\end{aligned}$$

故对每个 s，存在唯一解 $u=U_+(s)>J$．鉴于 $u-j(s)>0$，$j'(s)$

>0, 故 $0<\frac{dU_+(s)}{ds}\leqslant j'(s)$. 当 $s_0>J$ 时, $h(s_0, s_0-j(s_0))=h(s_0, z_0)$, 故 $s_0=U_+(s_0)$. 另方面, $U_+(s)\geqslant J\Rightarrow Ks<U_+(s)$, 当 $0<Ks\leqslant J$; $j'(s)\leqslant K$, $\forall s\in\{s|K|s|>J\}$ 及 $0<\frac{dU_+(s)}{ds}\leqslant j'(s)\Rightarrow 0<\frac{dU_+(s)}{ds}<K$, $\forall s\in\{s|K|s|>J\}$. 因此存在唯一的 s_+ 使得

$$Ks_+=U_+(s_+)$$

显然, $0<s_+<s_0$ 及 $Ks\leqslant U_+(s)$ (当 $s\leqslant s_+$).

类似地可引进函数 $U_-(s)<-J$ 及常数 s_-, 用 $-s_0$ 及 $-J$ 代替上述之 s_0 及 J.

以下给出 $\mathscr{C}_k$ 的定义.

先引入 $\mathscr{C}_1$ 的"底" $\mathscr{B}_1$(在 (s, u) 平面上); 参见图 9. $\mathscr{B}_1=\{(s, u)|-s_0\leqslant s\leqslant s_0;\ 0\leqslant u\leqslant U_+(s),\ s\in[-s_0, 0];\ s\leqslant u\leqslant U_+(s),\ s\in[0, s_0]\}$. 进一步定义 $\mathscr{C}_1$ 为(在此, 引入 $z=j(s)-r$, 令 $Z=[h(s_0, z_0)-\alpha J^2]^{1/2}$, $z_0=s_0-j(s_0)$):

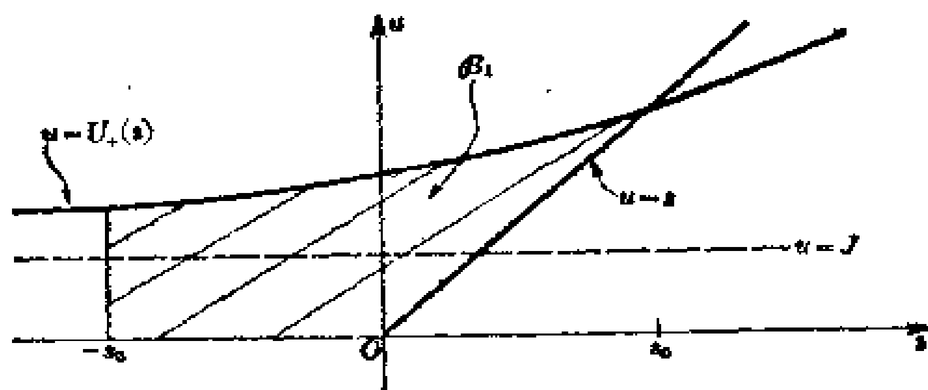


图 9

$$\mathscr{C}_1=\{(s, u, z)|(s, u)\in\mathscr{B}_1;\ -Z\leqslant z\leqslant j(s)-u,\ u\in[0, J];$$
$$-[h(J, Z)-\alpha u^2]^{1/2}\leqslant z\leqslant j(s)-u,\ u\in[J, U_+(s)]\}.$$

在 $\mathscr{C}_1$, 若 $u\neq r$, 则有 $\frac{du}{d\theta}>0$; 若 $s\neq u$, 则有 $\frac{ds}{d\theta}>0$; $\mathscr{C}_1$ 的"正门"是集合 $\{(s, 0, z)|-s_0\leqslant s\leqslant 0,\ -Z\leqslant z\leqslant j(s)\}$; $\mathscr{C}_1$ 的"出口"是集合 $\{(s, u, z)|(s, u)\in\mathscr{B}_1,\ u=r,\ Ks-u\geqslant 0\}$; $\partial\mathscr{C}_1$ 的其余部分就是 $\mathscr{C}_1$ 的"侧门".

对 $u\leqslant 0$，模仿上法，定义 $\mathscr{C}_3$.

$\mathscr{C}_2$ 的定义如下. $\mathscr{C}_2$ 的"底"为(参考图 10)：

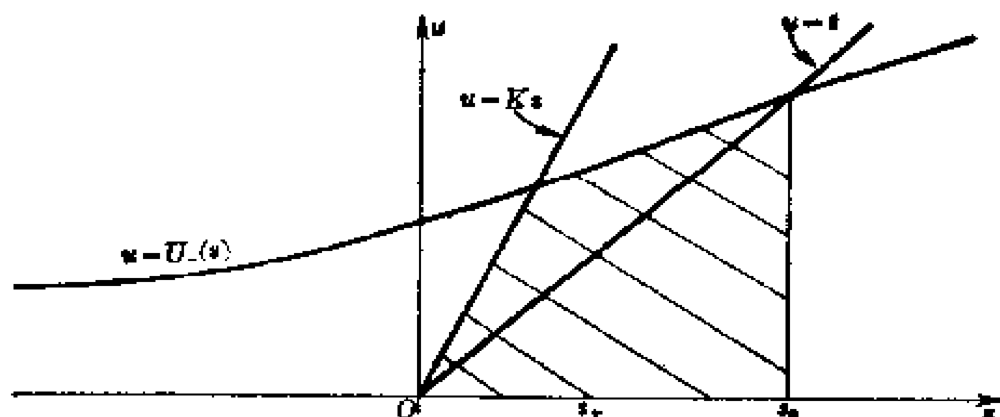


图 10

$$\mathscr{B}_2=\{(s,\ u)\,|\,s\in[0,\ s_0];\ 0\leqslant u\leqslant Ks,\ s\in[0,\ s_+];$$
$$0\leqslant u\leqslant U_+(s),\ s\in[s_+,\ s_0]\}.$$
$$\mathscr{C}_2=\{(s,\ u,\ z)\,|\,(s,\ u)\in\mathscr{B}_2,$$
$$j(s)-u\leqslant z\leqslant[h(J,\ Z-aJ)-au^2]^{1/2},\ u\geqslant J;$$
$$j(s)-u\leqslant z\leqslant Z-au,\ u\in[0,\ J]\}.$$

在 $\mathscr{C}_2$，若 $u\neq r$，有 $\dfrac{du}{d\theta}<0$；$\mathscr{C}_2$ 的"正门"为集合 $\{(s,\ u,\ r)\,|\,u=r,$ $(s,\ u)\in\mathscr{B}_2,\ s-u\leqslant 0\}$，它与 $\mathscr{C}_1$ 的"出口"重合. $\mathscr{C}_2$ 的"出口"为 $\{(s,\ u,\ r)\,|\,u=0,\ 0\leqslant s\leqslant s_0,\ j(s)\leqslant z\leqslant Z\}$，它与 $\mathscr{C}_3$ 的"正门"重合. $\partial\mathscr{C}_2$ 的其余部分是 $\mathscr{C}_2$ 的"侧门".

当 $u\leqslant 0$ 时，仿上法，定义 $\mathscr{C}_4$. $\mathscr{C}_3$ 的"出口"就是 $\mathscr{C}_4$ 的"正门"，$\mathscr{C}_4$ 的"出口"正是 $\mathscr{C}_1$ 的"正门"；于是 $\mathscr{C}_k$，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 共同组成区域 $\mathscr{D}$. 从 $\mathscr{C}_1$ 的"正门"出发的任一轨道，在 $\mathscr{D}$ 内转一圈，必重返 $\mathscr{C}_1$ 的"正门".

现来构造原点的一邻域 $\mathscr{E}$，使 $\mathscr{T}=\mathscr{D}\backslash\mathscr{E}$ 满足环区原理的条件.

注意及 $\mathscr{D}\cap\{(s,\ u,\ r)\,|\,\mathrm{sgn}\,s=-\mathrm{sgn}\,u=\mathrm{sgn}\,r\}=\emptyset$，即 $\mathscr{D}$ 位于其余六个卦限内. 将切除一个连接 $\{(s,\ u,\ r)\,|\,s>0,\ u<0,\ r>$

0} 与 $\{(s, u, r)\mid s<0,\ u>0,\ r<0\}$ 的管形区域，使 $\mathscr{D}$ 变为环区。

(7.2)在(0, 0, 0)的线性化方程，可经满秩线性变换化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{d\theta}-a_1x_1-bx_2=0,\\ \dfrac{dx_2}{d\theta}-a_2x_2+bx_1=0,\\ \dfrac{dx_3}{d\theta}+a_3x_3=0,\end{cases}$$

其中或者 $a_1=a_2$，或 $b=0$；当 $\rho\eta[(1-\rho)\eta-1]+\alpha(\eta-1)>0$ 时，$a_1,\ a_2,\ a_3>0$；直线 $x_1=0,\ x_2=0$ 落在 $\{(s, u, r)\mid \operatorname{sgn} s=-\operatorname{sgn} u=\operatorname{sgn} r\}$. 考虑锥面 $x_1^2+x_2^2-\nu x_3^2=0,\ \nu>0$，其对称轴为 $x_1=0,\ x_2=0$. 可选取 ν 充分小，使此锥面属于 $\{(s, u, r)\mid \operatorname{sgn} s=-\operatorname{sgn} u=\operatorname{sgn} r\}$. 又考虑单叶双曲面 $x_1^2+x_2^2-\nu x_3^2=Q_0>0$. 可选取 Q_0 充分小，使此单叶双曲面在 $\{(s, u, r)\mid \operatorname{sgn} s=-\operatorname{sgn} u=\operatorname{sgn} r\}$ 以外的部分全属于 $|s|\leqslant s_*$，其中 s_* 将在下面确定. 此单叶双曲面在 $\mathscr{D}$ 中切去原点的一邻域 $\mathscr{E}$，使 $\mathscr{T}=\mathscr{D}\setminus\mathscr{E}$ 是一环区，$\mathscr{E}$ 也落在 $|s|\leqslant s_*$ 内. 可以选取 s_* 使得 $\dfrac{d}{d\theta}[x_1^2+x_2^2-\nu x_3^2]>0,\ \forall s\in[-s_*, s_*]\setminus\{0\}$. 于是 $\mathscr{T}$ 满足环区原理的条件，从而保证系统(7.2)在 $\mathscr{T}$ 内存在周期轨道.

总结上述，有下列

命题 7.1(Friedrichs) 设系统(7.2)满足下列条件：

(i) $j(0)=0$; $j'(s)>0$; $j'(s)\to0\ (|s|\to\infty)$; $j(s)\to j(\infty)<\infty\ (s\to\infty)$; $j(s)\to j(-\infty)>-\infty\ (s\to-\infty)$;

(ii) $0<\rho<1,\ \alpha>0$;

(iii) $\rho\eta[(1-\rho)\eta-1]+\alpha(\eta-1)>0$，其中 $\eta=j'(0)$.

则系统(7.2)至少存在一周期轨道.

7.1.2 另一个描写真空管振荡电路的三维动力系统的周期轨道存在性与唯一性

Rauch[31]研究了另一个非线性振荡电路(图 11)的微分方程

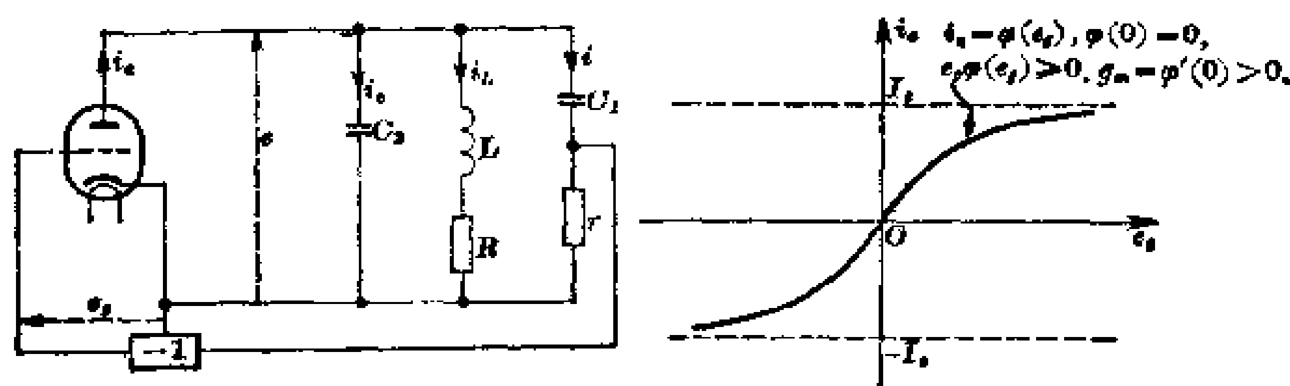


图 11

的(非常数)周期解的存在性.

可列出此电路的微分方程:

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\dfrac{1}{rC_2}\left[\varphi(ri)-\left(1+\dfrac{C_2}{C_1}\right)i-i_L\right], \\ \dfrac{de}{dt}=-\dfrac{1}{C_2}[\varphi(ri)-i-i_L], \\ \dfrac{di_L}{dt}=-\dfrac{1}{L}(e+Ri_L). \end{cases}$$

引入无量纲之量 x, y, z, 使

$$i=I_sx,\ e=RI_sy,\ i_L=I_sz.$$

定义
$$\varphi(ri)=I_sf(x),$$

我们有 $|f(x)|\leqslant 1$, $f(0)=0$, $xf(x)\geqslant 0$, $f'(0)=rg_m$.

于是可改写上面的方程为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{rC_2}\left[f(x)-\left(1+\dfrac{C_2}{C_1}\right)x-z\right], \\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{RC_2}[f(x)-x-z], \\ \dfrac{dz}{dt}=-\dfrac{R}{L}[y+z]. \end{cases} \tag{7.3}$$

Rauch[31] 运用环区原理证明了

命题 7.2(Rauch) 设(7.3)满足下列条件:

(i) $g_m>G$, 其中

$$G=\frac{1}{2R}+\frac{RC_2}{2L}+\frac{1}{r}\left(1+\frac{C_2}{C_1}\right)-\sqrt{\left(\frac{1}{2R}-\frac{RC_2}{2L}\right)^2+\frac{C_2}{RrC_1}};$$

(ii) $\overline{\varphi^2(ri)}\leqslant C<\infty$, 这里 $\varphi(ri)=I_s f(x)$;

(iii) $\dfrac{R}{L}>\dfrac{4.6}{RC_2}\sup\limits_{x\in R}\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{9.7}{RC_2}+\dfrac{5.0}{rC_2}+\dfrac{2.4}{rC_1}$;

(iv) $f'(0)>0$ 存在($f'(0)=rg_m$), $xf(x)\geqslant 0$, $f(x)$ 连续;

则(7.3)存在周期轨道.

证明的方法是：分三步作出一个符合环区原理的条件的实心环. 第一步，作一个顶点在原点的对称圆锥作为此环域的侧面，其方程为

$$\frac{y+z}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{l}{\rho}=\sin\xi=a$$

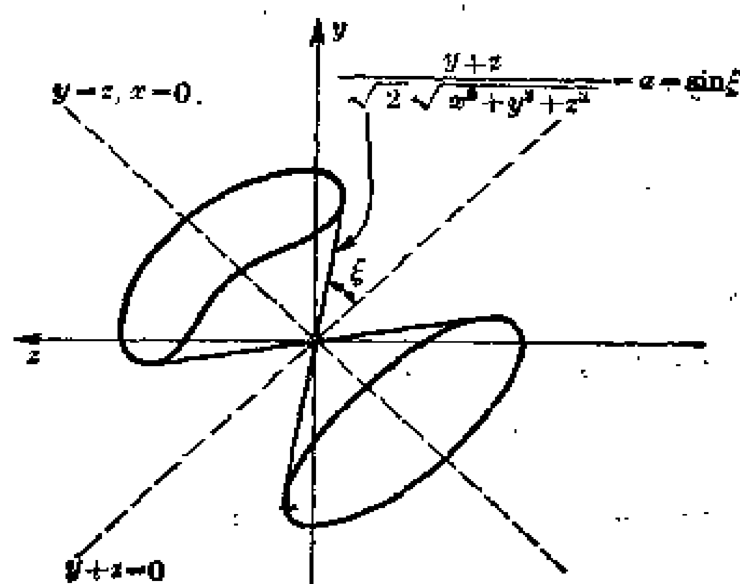


图 12

(参见图 12). 第二步，取闭曲面

$$p=C_2R^2y^2+C_1(Ry+rx)^2+Lz^2,$$

其中 p 为参数；只要取 p 足够大，(7.3)在此曲面上的向量场均指向曲面内部，故可取此曲面为环域的外界. 第三步，类似于命题 7.1 (Friedrichs)的方法，在原点邻域取一柱面把原点截去，所求之环域即作成. 详情参见[31]或秦元勋[1].

秦元勋[104]针对 Rauch 方程的特点，设计出证明周期轨道唯一性的方法. 这方法的特点是：在一定条件下，把三阶方程因式分解为一个一阶线性方程和一个二阶非线性方程，然后用二阶强迫振动系统的结论来研究空间周期解.

改写 Rauch 方程(7.3)为

$$k_1 \frac{d^3x}{dt^3} + (k_2 + k_3 g(x))\frac{d^2x}{dt^2} + k_2 \frac{dg(x)}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$+ g(x)\frac{dx}{dt} + x = 0, \tag{7.3*}$$

其中 $k_1, k_2, k_3 \in R^1$ 为常数，$g(x)$ 为非线性函数．引入记号

$$D = \frac{d}{dt}, \quad D^n = \frac{d^n}{dt^n},$$

则(7.3*)左方可写成恒等式

$$k_1 \frac{d^3x}{dt^3} + (k_2 + k_3 g(x))\frac{d^2x}{dt^2} + k_3 \frac{dg(x)}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + g(x)\frac{dx}{dt} + x$$

$$\equiv [k_3 D + 1]\left[\frac{k_1}{k_3} D^2 + \{g(x) - k_3\} D + 1\right]x$$

$$+ \left(k_2 - \frac{k_1}{k_3} + k_3^2\right)D^2 x. \tag{7.4}$$

由恒等式(7.4)可得

引理 1(秦元勋[104]) 设

$$k_2 - \frac{k_1}{k_3} + k_3^2 = 0, \tag{7.5}$$

则方程(7.3*)可分解成一个一阶线性方程和一个二阶非线性方程：

$$\left[\frac{k_1}{k_3} D^2 + \{g(x) - k_3\} D + 1\right]x = U, \tag{7.6}$$

及

$$[k_3 D + 1]U = 0. \tag{7.7}$$

注意：由(7.7)可积分得

$$U(t) = U(0)\exp(-t/k_3) = C\exp(-t/k_3). \tag{7.8}$$

因此可把(7.3*)的研究化为二阶非线性系统强迫振动时的情形，即化为方程

$$\left[\frac{k_1}{k_3} D^2 + \{g(x) - k_3\} D + 1\right]x = C\exp(-t/k_3)$$

的研究，这里 C 是任意常数．这样一来，便可利用强迫振动系统的理论来研究空间周期解．

于是有

命题 7.3(秦元勋[104]）　设方程(7.3*)满足

（i）分解条件(7.5),

（ii）二阶非线性方程

$$\left[\frac{k_1}{k_3}D^2+\{g(x)-k_3\}D+1\right]x=0,\ k_1>0,\ k_3>0, \tag{7.9}$$

存在唯一的周期解,则(7.3*)存在唯一的周期解.

证明　在(7.5)的条件下，可把(7.3*)分解为(7.6)及(7.7).如果(7.9)有周期解

$$x=x(t),$$

则(7.6)及(7.7)有周期解,从而(7.3*)也有周期解

$$x=x(t),$$

存在性遂得证.

至于唯一性,设(7.3*)有周期解 $x=x(t)$,则据(7.6)所作函数 $U(t)$ 亦是周期函数，但由(7.8)，$U(t)$若是 t 的周期函数，只有 $U(0)=0$，从而

$$U(t)\equiv 0.$$

由此看出 $x(t)$必满足方程(7.9).由假设(ii),(7.9)的周期解是唯一的,所以(7.3*)的周期解也是唯一的. ▌

此外，秦元勋[104]还讨论了此周期轨道的稳定性，详见[104].

7.1.3　一个描写晶体管振荡电路的三维动力系统的周期轨道存在性

李炳熙[32]用环区原理讨论了下列非线性电路的微分方程的周期轨道的存在性(参考图13). 这里，晶体管的雪崩特征曲线 $v=f(i)$ 为

$$v=f(i)=\begin{cases} i/(\sigma_1 i^2+\sigma_2 i+\sigma_3),\ i\geqslant 0,\\ i/(\sigma_1 i^2-\sigma_2 i+\sigma_3),\ i<0,\end{cases}$$

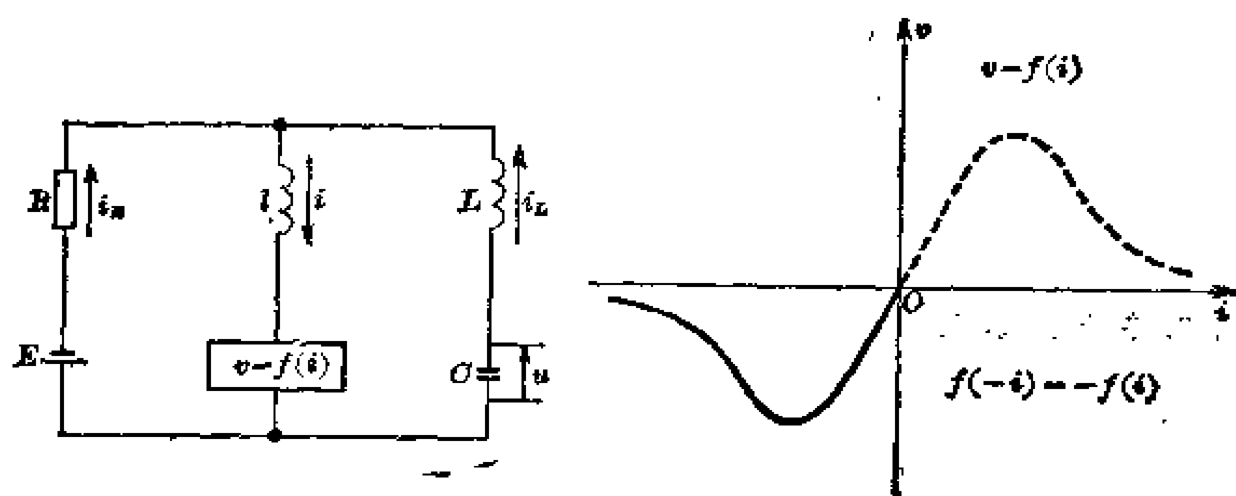


图 13

其中 $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $\sigma_3>0$, $\sigma_2^2-4\sigma_1\sigma_3<0$; $f(i)=0$ 有唯一实根 $i=0$; $if(i)>0$, $i\neq 0$; $f(i)$ 在 $\pm\sqrt{\sigma_3/\sigma_1}$ 达极值; $f(i)$的图形在 $i\in(\sqrt{\sigma_3/\sigma_1}, 2\sqrt{\sigma_3/\sigma_1})$ 及 $i\in(-2\sqrt{\sigma_3/\sigma_1}, -\sqrt{\sigma_3/\sigma_1})$ 各有一拐点; $\lim\limits_{|i|\to\infty} f(i)=0$.

描写此电路的微分方程为

$$\frac{l}{R}\frac{d^3i}{dt^3}+\left[1+\frac{l}{L}+\frac{1}{R}f'(i)\right]\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{R}f''(i)\left(\frac{di}{dt}\right)^2+\frac{1}{L}f'(i)\frac{di}{dt}+\frac{l}{CRL}\frac{di}{dt}+\frac{1}{CL}i-\frac{E}{CRL}+\frac{1}{CRL}f(i)=0,$$

其中 $f'(i)=\frac{df(i)}{di}$, $f''(i)=\frac{d^2f(i)}{dt^2}$; $l>0$, $R>0$, $L>0$, $C>0$, $E<0$ 为电路参数.

设方程

$$Ri-E+f(i)=0$$

有唯一实根 x_0(这时 $x_0<0$), 并引入下列记号:

$$a=1/l,\ b=R/L,\ \alpha=R^2/L-l/CL,\ \beta=1/CL,\ x=i-x_0,$$
$$F(x)=R(x+x_0)-E+f(x+x_0),$$

则上述三阶方程可改写成等价系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -aF(x) - az, \\
\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{a\alpha+\beta}{b}F(x) - \dfrac{a\alpha}{b}z, \\
\dfrac{dz}{dt} = -by - bz.
\end{cases}
\tag{7.10}
$$

若用原来参数表示，(7.10)呈下列形式：

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{l}F(x) - \dfrac{1}{l}z, \\
\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{R}{l}F(x) - \left(\dfrac{R}{l} - \dfrac{1}{CR}\right)z, \\
\dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{R}{L}y - \dfrac{R}{L}z,
\end{cases}
\tag{7.11}
$$

其中 x, y, z 的物理意义为

$$
\begin{aligned}
x &= i - x_0, \\
y &= Ri - u - E, \\
z &= -Ri_L.
\end{aligned}
$$

运用环区原理，可以证明

命题 7.4([32]) 设下列条件成立：

(i) $Rx - E + f(x) = 0$ 有唯一实根 x_0，且

$f'(x_0) < [-R(1+l/L) + \sqrt{R^2(1+l/L)^2 - 4l^2/LC}]/2$;

(ii) $\max\{60L, 6L/C, 3l/2C\} < R^2 < 3l/C$;

则系统(7.11)存在周期轨道.

证明 方法雷同于证明命题 7.1 和 7.2，详见[32]. ∎

7.2 力学及自动控制方面的应用

7.2.1 一个非线性力学中的三维动力系统的周期轨道存在性

Mulholland[33] 研究了三阶非线性方程

$$\dddot{x} + F(r)\ddot{x} + F(r)\dot{x} + x = 0,$$

其中
$$F(r)=1-\varepsilon f(r),$$
$$f(r)=1-r^2,$$
$$r^2=(x)^2+(\dot{x})^2+(\ddot{x})^2,$$
$\varepsilon\geqslant0$ 为小参数.

当 $\varepsilon=0$ 时,此方程是线性的,具有周期解 $x=\cos(t+\varphi)$, 若 $\varepsilon\neq0$, 可运用环区原理研究周期解的存在性. 为此,令 $y=\dot{x}$; $z=\ddot{x}$, 上述方程化为等价系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=z,\\ \dot{z}=\quad F(r)(y+z)-x,\end{cases}\tag{7.12}$$

其中 $r=x^2+y^2+z^2$.

先讨论系统(7.12)的奇点.

显然(0, 0, 0)是(7.12)的唯一奇点. (7.12)在(0, 0, 0)的线性化方程为

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=z,\\ z=-(1-\varepsilon)(y+z)-x.\end{cases}$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & (1-\varepsilon) & \lambda+(1-\varepsilon)\end{vmatrix}=0,$$

三个特征根为: $\lambda_1=-1$, $\lambda_{2,3}=\varepsilon/2\pm i[1-(\varepsilon/2)^2]^{1/2}$. 当 $0<\varepsilon<2$ 时, $\mathrm{Re}(\lambda_{2,3})>0$, 原点为鞍焦点; 当 $\varepsilon>2$ 时, 三根皆为实根, 一正两负, 原点为鞍点. $\lambda_1=-1$ 的主方向与直线 $y=-x$, $z=x$ 重合.

以下,逐步构造不变环区(其内无奇点).

取两个同轴柱面为内侧边界和外侧边界:

(内侧) $S_1(x, y, z)=(y+z)^2+(y+x)^2=a_1^2$; $a_1>0$;

(外侧) $S_2(x, y, z)=(y+z)^2+(y+x)^2=a_2^2$, $a_2>0$.

它们均以直线 $y=-x$, $z=x$ 为主轴. 作正交变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix},$$

使得 ζ 轴与直线 $y=-x$, $z=x$ 重合, 于是上述柱面的方程变为

$$\xi^2+3\eta^2=a_k^2,\ k=1,\ 2.$$

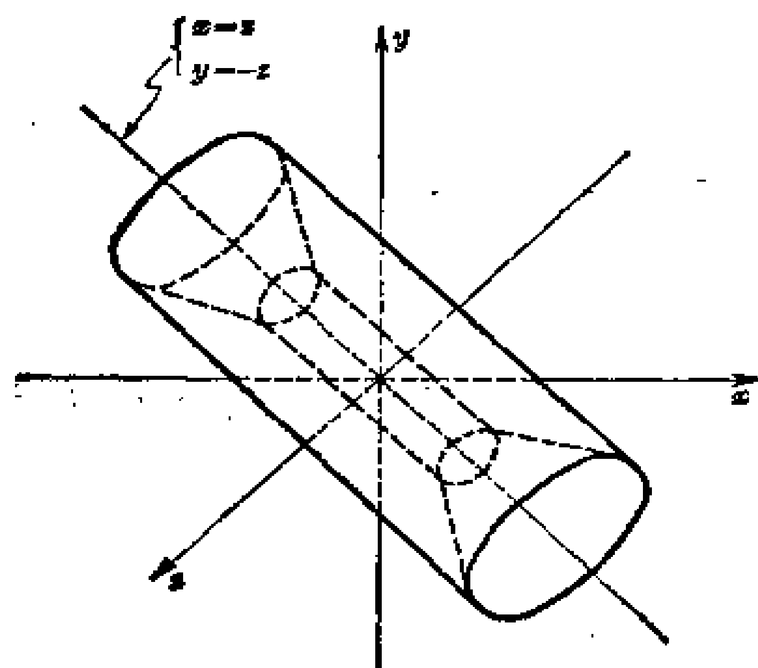


图　14

因所作的变换是坐标轴的旋转, 故由新方程看出这两柱面是椭圆柱面, 其长、短轴之比为 $\sqrt{3}$. 在 $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ 空间考虑锥面

$$\xi^2+3\eta^2=m^2\zeta^2,$$

其中 $m>0$. 此锥面在 $(x,\ y,\ z)$ 空间的方程是

$$S_2(x,\ y,\ z)=0,$$

其中 $S_2(x,\ y,\ z)=(y+z)^2+(y+x)^2-\frac{m^2}{3}(x-y+z)^2$. 这个锥面连同上述两个椭圆柱面共同构成一个环面(见图 14). 余下要证的是此环区满足环区原理的条件. 取柱面 $S_1(x,\ y,\ z)=a_k^2$ 的外法向量 $n_1=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial S_1}{\partial x},\ \frac{\partial S_1}{\partial y},\ \frac{\partial S_1}{\partial z}\right)$, 考虑内积

$$(n_1,\ v)=|n_1|\cdot|v|\cos\varphi_1,$$

其中 $v=(\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$ 为系统(7.12)的轨道的切向量, φ_1 为 n_1 与 v 之夹角; 由(7.12)可得

$$\cos\varphi_1=(s/|n_1|\cdot|v|)(1-r^2)(y+z)^2.$$

故当 $y\neq-z$, $\cos\varphi_1>0$ (当 $r<1$), $\cos\varphi_1<0$ (当 $r>1$). 至于 $y=-z$ 的情形, 分析如下: 注意及

$$\frac{dS_1}{dt}=\frac{\partial S_1}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial S_1}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial S_1}{\partial z}\dot{z},$$

由 $\cos\varphi_1$ 之表达式知，对某 $t=t_0$(使得 $y(t_0)=-z(t_0)$ 者)，$\frac{dS_1}{dt}=0$. 可以证明，在 $t=t_0$, $\frac{d^2S_1}{dt^2}=0$, $\frac{d^3S_1}{dt^3}\neq 0$. 这出现在曲面 S_1 与平面 $y=-z$ 的交线处，这些交线的方程是

$$\begin{cases} y=-z, \\ x+y=\pm a_k, \ k=1, 2. \end{cases}$$

因此，当 $k=1$ 时，(7.12)的轨道在此两交线的任一邻域(除去这两交线)离开柱面；当 $k=2$ 时，则进入柱面内. 当 $a_k\neq 0$ 时，这两交线均不是(7.12)的轨道，所以沿(7.12)的任一轨道，$\cos\varphi_1=0\Leftrightarrow r^2=1$.

这样一来，我们有下列事实：存在一段椭圆柱面 $S_1(x, y, z)=a_1^2$，它全落在单位球 $r^2=1$ 之内，使得(7.12)自此柱面内出发的轨道(轨道 $y=-x$, $z=x$ 除外)如与此柱面相交，必穿过柱面进入柱面外部；同时存在一段柱面 $S_1(x, y, z)=a_2^2$，它把单位球 $r^2=1$ 完全包含在内，使得(7.12)自此柱面外出发的轨道(轨道 $y=-x$, $z=x$ 除外)如与柱面相交，必穿过柱面进入其内部.

考虑锥面 $S_2(x, y, z)=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial S_2}{\partial x}, \frac{\partial S_2}{\partial y}, \frac{\partial S_2}{\partial z}\right)$，作内积

$$(\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{v})=|\boldsymbol{n}_2|\cdot|\boldsymbol{v}|\cos\varphi_2,$$

可得

$$\begin{aligned}\cos\varphi_2=&[1-F(r)](y+z)^2/|\boldsymbol{n}_2|\cdot|\boldsymbol{v}|\\&+(m^2/3|\boldsymbol{n}_2|\cdot|\boldsymbol{v}|)(x-y+z)^2\\&+(m^2/3|\boldsymbol{n}_2|\cdot|\boldsymbol{v}|)F(r)(y+z)(x-y+z).\end{aligned}$$

注意及 $r>1\Rightarrow 1-F(r)<0$，故当

$$\begin{aligned}&|[1-F(r)](y+z)^2+(m^2/3)F(r)(y+z)(x-y+z)|\\&\quad<(m^2/3)(x-y+z)^2,\end{aligned} \qquad (*)$$

$\cos\varphi_2>0$. 但是, $|1-F(r)|\leqslant\varepsilon(1+r^2)$; 另外, $S_2(x,y,z)=0\Rightarrow |y+z|\leqslant(m/3)|x-y+z|$, $\forall(x,y,z)\in\mathrm{Int}\{(x,y,z)|S_2(x,y,z)=0\}$. 故 $\varepsilon(1+r^2)+(m/\sqrt{3})[1+\varepsilon(1+r^2)]<1\Rightarrow(*)$. 令 r_0 是外柱面的外接球之半径, 于是锥面在(ξ,ζ)平面之斜率 m 由下式控制(当 $\varepsilon<(1+r_0^2)^{-1}$ 时):

$$m<\sqrt{3}\,\frac{1-\varepsilon(1+r_0^2)}{1+\varepsilon(1+r_0^2)}.$$

所以, 当 $\varepsilon<(1+r_0^2)^{-1}$ 时, $\cos\varphi_2>0$. 即是说, 当 ε 充分小时, 可选取 $a_2>1$ 使得 $a_2^2+b_2^2=r_0^2$, 其中 $a_2/b_2=m$; 同理, 斜率m决定了内柱面之参数, 即 $a_1^2+b_1^2=1$, $a_1/b_1=m$. 环区遂作成.

利用方程(7.12), 可证(7.12)的轨道在上述环区内绕轴线 $x=z$, $y=-z$ 旋转. 于是由环区原理推得(非奇点)周期轨道的存在性.

总结上述, 有

命题 7.5(Mulholland[33]) 当 ε 充分小时, 系统(7.12)存在周期轨道.

7.2.2 一类非线性反馈控制系统的周期轨道存在性

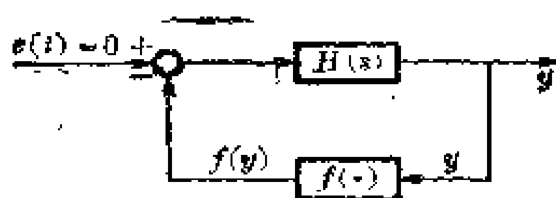


图 15

Noldus[34] 用环区原理研究了下列自治、非线性反馈系统的周期轨道的存在性, 并用自动控制理论常见的频域语言表达其结果: 假设此系统的线性部分的传递函数 $H(s)$是有理函数, 即 $H(s)=q(s)/p(s)$, 其中 $q(s)$, $p(s)$ 是 s 的多项式, 彼此互质, 而且 $\deg[p(s)]>\deg[q(s)]$; $f(y)$ 为充分光滑的非线性函数, 足以保证系统的方程的解存在唯一, 另外 $f(0)=0$. 若令 $y=q(D)z$, 则描写此系统的 n 阶微分方程为

$$p(D)z+f(q(D)z)=0,\quad D=d/dt. \tag{7.13}$$

(7.13) 可改写成下列形式:

$$\dot{x} = Ax - bf(c^T x), \tag{7.14}$$

其中 $n \times n$ 阵 A，向量 b，c 是这样选取，使得

$$c^T(sI - A)^{-1}b = H(s), \quad x = \mathrm{adj}(DI - A) \cdot bz \in \mathbb{R}^n.$$

同时假设系统(7.14)在相空间中仅有一个奇点 $x=0$.

Noldus 采用 Ляпунов 函数来定义环区的边界，其基本思想在 3.1 中已略有提及.

以下分别证明四条引理，引理 1-3 解决环区的边界条件，引理 4 解决(7.14)的轨道在环区内旋转的条件. 当这四条引理的条件均满足时，环区原理的条件便全部成立.

引理 1 令 $S_B(x) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B(x) = x^T Bx - R^2 \leqslant 0,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B^T = B > 0\}$. 假设 (i) $\exists h: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$，使得 $|f(u) - h(u)|$ 有界，$\forall u \in \mathbb{R}^1$；且对某两常数 k_1, k_2, $k_1 u^2 \leqslant uh(u) \leqslant k_2 u^2$, $\forall u \in \mathbb{R}^1$；(ii) 令 $G_{12}(s) = \dfrac{1 + k_2 H(s)}{1 + k_1 H(s)}$，$G_{12}(s)$ 的全部极点均在半平面 $\mathrm{Re}(s) < 0$ 内，而且 $\mathrm{Re}(G_{12}(i\omega)) > 0$, $\forall \omega \in \mathbb{R}^1$，则 $\dfrac{d}{dt}B(x) < 0$, $\forall x \in \partial S_B(x)$.

证明 不失一般性，可设 $k_1 = 0$. 于是有

$$\frac{d}{dt}B(x) = x^T(BA + A^T B)x - (2Bb - c)^T x h(c^T x)$$
$$- k_2^{-1} h^2(c^T x) - 2(Bb)^T x[f(c^T x) - h(c^T x)] - \lambda_h(c^T x), \tag{7.15}$$

其中 $\lambda_h(u) = h(u)[u - k_2^{-1}h(u)] \geqslant 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^2$. 现令

$$\frac{d}{dt}B(x) = -[q^T x + k_2^{-\frac{1}{2}} h(c^T x)]^2 - \varepsilon x^T Dx$$
$$-2(Bb)^T x[f(c^T x) - h(c^T x)] - \lambda_h(c^T x), \tag{7.16}$$

其中 $\varepsilon D = \varepsilon D^T > 0$, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 由(7.15)，(7.16)得到一矩阵方程，由 Kalman 主要引理，当条件(ii)满足时，可解出 q 及 $B = B^T > 0$. (7.16)显示，当 R 充分大时，$\dfrac{d}{dt}B(x) < 0$, $\forall x \in \partial S_B(x)$. ∎

[注] **Kalman** 主要引理 (Kalman[154])* 已知 $\gamma\in\mathbb{R}^1$, g, $c\in\mathbb{R}^n$, $F\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 设 $\gamma\geqslant0$, F 稳定, (F, g)完全可控,则存在 $q\in\mathbb{R}^n$, $P=P^T\geqslant0$, $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足方程

$$F^TP+PF=-qq^T,$$

$$Pg-c=\sqrt{\gamma}q,$$

的充分必要条件为

$$(1/2)\gamma+\mathrm{Re}[c^T(i\omega I-F)^{-1}g]\geqslant0,\ \forall\omega\in\mathbb{R}^1.$$

F 稳定是指 F 的一切特征值 λ 满足 $\mathrm{Re}(\lambda)<0$. (F, g)完全可控等价于下列(i)或(ii):

(i) $\det[g, Fg, \cdots, F^{n-1}g]\neq0$;

(ii) $x^T[\exp Ft]g=0$, $\forall t\in\mathbb{R}^1\Rightarrow x=0$.

有关完全可控的概念,可参考 Brockett[155].

引理 2 假设(i)对某两常数 k_3, k_4, $k_3u^2\leqslant uf(u)\leqslant k_4u^2$, $\forall u\in\mathbb{R}^1$; (ii)系统(7.14)在原点之线性化方程 $\dot{x}=[A-f^{(1)}(0)bc^T]x$ 有 $n_1(1\leqslant n_1<n)$ 个特征值位在 $\mathrm{Re}(s)>0$ 这半平面, 而其余均在 $\mathrm{Re}(s)\leqslant-d<0$; (iii)对某常数 r, $0<r<d$,

$$\mathrm{Re}[G_{34}(i\omega-r)]=\mathrm{Re}\left[\frac{1+k_4H(i\omega-r)}{1+k_3H(i\omega-r)}\right]>0,\ \forall\omega\in\mathbb{R}^1.$$

则存在集合 $S_V(x)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid V(x)=x^TVx\leqslant0,\ V=V^T\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$ 及 $S_C(x)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid C(x)=x_1^TCx_1-s^2\leqslant0,\ C=C^T>0,\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}^{n_1}\}$, 使得 $T(x)=S_B(x)\cap S_V(x)\cap S_C(x)$ 为一环区, 且(7.14)自 $\partial T(x)\cap\partial S_V(x)$ 或 $\partial T(x)\cap\partial S_C(x)$ 出发的轨道均进入 $\mathrm{Int}\,[T(x)]$.

证明 不失一般性, 可设 $k_3=0$, 我们有

$$\frac{d}{dt}V(x)+2rV(x)=x^T[V(A+rI)+(A+rI)^TV]x$$
$$-(2Vb-c)^Txf(c^Tx)-k_4^{-1}f^2(c^Tx)-\lambda_f(c^Tx),\qquad(7.17)$$

其中 $\lambda_f(u)=f(u)[u-k_4^{-1}f(u)]\geqslant0$, $\forall u\in\mathbb{R}^1$. 另方面, 令

---

* 这里只引用了 Kalman 主要引理的前半部分.

$$\frac{d}{dt}V(x)+2rV(x)=-[q^Tx+k_4^{-1/2}f(c^Tx)]^2-\varepsilon x^TDx$$
$$-\lambda_f(c^Tx). \tag{7.18}$$

由(7.17), (7.18)得到矩阵方程

$$\begin{cases} V(A+rI)+(A+rI)^TV=-qq^T-\varepsilon D, \\ 2Vb-c=2k_4^{-1/2}q. \end{cases} \tag{7.19}$$

由 Kalman 主要引理知，当条件(iii)成立及 Kronecker 和 $I\otimes(A^T+rI)+(A^T+rI)\otimes I$ 非奇异时，方程(7.19)有解 q 及 $V=V^T$. 由于 r 是自由参数，可控制 r 使 Kronecker 和非奇异.

其次，令 $f(u)=k_0u+f_1(u)$, $k_0=f^{(1)}(0)$. 于是系统(7.14)可改写成

$$\dot{x}=A_1x-bf_1(c^Tx),$$

其中 $A_1=A-k_0bc^T$, $f_1^{(1)}(0)=0$. A_1+rI 是不稳定的，连同条件(iii)保证了 $A+rI$ 亦是不稳定的，所以 V 不定号. 现按下列方式把 A_1, V, b 及 x 分块：

$$A_1=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{12} \end{bmatrix}, \quad V=\begin{bmatrix} V_1 & V_3 \\ V_3^T & V_2 \end{bmatrix},$$
$$b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_1\in\mathbb{R}^{n_1},$$

其中 A_{11} 有 n_1 个特征值在 $\mathrm{Re}(s)>0$ 内，A_{12} 具有 A_1 的其余特征值. 由(7.19)得

$$\begin{aligned} & x^T[V(A_1+rI)+(A_1+rI)^TV]x \\ & =-x^T(q+k_0k_4^{-1/2}c)(q+k_0k_4^{-1/2}c)^Tx-\varepsilon x^TDx \\ & \quad -k_0(1-k_0k_4^{-1})x^Tcc^Tx \\ & =-x^TS_0x, \quad S_0=S_0^T>0. \end{aligned}$$

在此式中令 $x_1=0$, 得

$$V_2(A_{12}+rI)+(A_{12}+rI)^TV_2=-S_{02}, \quad S_{02}=S_{02}^T>0.$$

$A_{12}+rI$ 的一切特征值皆在 $\mathrm{Re}(s)\leqslant r-d<0$. 因此，$V_2>0$, 所以 $V(x)$ 可表成

$$V(x) = -x_1^T Q_1 x_1 + \sum_{i=1}^{n-n_1} z_i^2,$$

其中 z_i(当 $x_1=0$)是 x_2 的各分量的线性组合．定义集合

$$S_C(x) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid C(x) = x_1^T C x_1 - \varepsilon^2 \geqslant 0,\ C = C^T > 0,$$
$$CA_{11} + A_{11}^T C = I\}.$$

考虑 $x \in \partial T(x) \cap \partial S_C(x)$，则模 $\|x\|$ 之大小相当于 ε 级．还有

$$\frac{d}{dt} C(x) = x_1^T (CA_{11} + A_{11}^T C) x_1 - 2(Cb_1)^T x_1 f_1(c^T x),$$

其中，当 $C(x)=0$ 及 $x \in T(x)$，第一项是正的，其数量级为 ε^2；而第二项的数量级为 ε^3，因为 $f^{(1)}(0)=0$．因此，当 ε 充分小时，$\frac{d}{dt}C(x)<0$．引理得证． ∎

引理 3 当 $n_1=2$，则在 $T(x)$ 可选取"横截面" $S(x)$，$S(x) \cong S^{n-1}$.

证明 当 $n_1=2$，引理 2 的条件(iii)⇒ 系统(7.14)的一切线性化方程 $\dot{x}=(A-kbc^T)x$，$k_3 \leqslant k \leqslant k_4$，在 $\operatorname{Re}(s) > -r$ 内恰有两个特征值；换言之，在(7.13)中令 $f(u)=ku+f_k(u)$，$k_3 \leqslant k \leqslant k_4$，可得

$$p_{k1}(D)p_{k2}(D)z + f_k(q(D)z) = 0,$$

其中 $p_{k1}(s)$ 在 $\operatorname{Re}(s) > -r$ 有两零点，$p_{k2}(s)$ 在 $\operatorname{Re}(s) < -r$ 有 $(n-2)$ 个零点．如用向量形式，上方程可表为

$$\dot{x} = (A - kbc^T)x - bf_k(c^T x).$$

作线性变换 $x = M\hat{x}$，可改写这方程为

$$\dot{\hat{x}} = A_k \hat{x} - b_k f_k(c_k^T \hat{x}),$$

其中 $A_k = \begin{bmatrix} A_{k1} & 0 \\ 0 & A_{k2} \end{bmatrix}$，$b_k = \begin{bmatrix} b_{k1} \\ b_{k2} \end{bmatrix}$，$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$，$\hat{x}_1 \in \mathbb{R}^2$，

$$\det(sI - A_{k1}) = p_{k1}(s), \quad \det(sI - A_{k2}) = p_{k2}(s).$$

现选取 $A_{k1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$，$b_{k1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\hat{x}_1 = \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} \\ \hat{x}_{12} \end{bmatrix}$

使得 $\hat{x}_{11} = [1\ 0\ 0\ \cdots\ 0]\operatorname{adj}(DI - A_k) \cdot b_k z = p_{k2}(D)z,$

$$\hat{x}_{12}=Dp_{k2}(D)z.$$

于是有

$$x^T[V(A-kbc^T+rI)+(A-kbc^T+rI)^TV]x=-x^TS_kx,$$

或

$$\hat{x}^T[\hat{V}(A_k+rI)+(A_k+rI)^T\hat{V}]\hat{x}=-\hat{x}^T\hat{S}_k\hat{x},\ \hat{S}_k=\hat{S}_k^T>0.$$

所以集合 $S_V(x)$ 可表成

$$S_V(x)=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\hat{x}^T\hat{V}\hat{x}=-\hat{x}_1^T\hat{Q}_1\hat{x}_1+\sum_{i=1}^{n-2}\hat{z}_i^2\leqslant 0,\ \hat{Q}_1=\hat{Q}_1^T>0\},$$

当 $\hat{x}_1=0$, $\hat{z}_i$ 是 $\hat{x}_2$ 的分量的线性组合. 由于原点在 $T(x)$ 之外, 故存在集合 $\Psi(x)=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\hat{x}_1^T\hat{x}_1\leqslant\varepsilon^2\}$, 使得 $\Psi(x)\cap T(x)=\emptyset$. 定义

$$F(x)=\{x\in\mathbb{R}^n\ \hat{x}_{11}=0,\ \hat{x}_{12}\geqslant 0\},$$

$$S(x)=T(x)\cap F(x)=S_B(x)\cap S_N(x)\cap S_C(x),$$

其中

$$S_N(x)=S_V(x)\cap F(x)=\Big\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\hat{x}_{11}=0,\ \hat{x}_{12}\geqslant 0,\ -a^2\hat{x}_{12}^2+\sum_{i=1}^{n-2}\hat{z}_i^2\leqslant 0\Big\}.$$

可以证明 $S_N(x)$ 是凸集, 而且 $S(x)$ 与下列凸集同胚: $S_1(x)=S_B(x)\cap S_N(x)\cap\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\hat{x}_{12}\geqslant\eta>0\}$. ∎

引理 4 设 (i) $\deg[q(s)]\leqslant n-2$; (ii) 对某 k, $k\in[k_3,\ k_4]$, 有 $\mathscr{L}^{-1}\{q(s)/p_{k2}(s)\}=\alpha\delta(t)+g(t)$, 其中 $\delta(t)$ 为 δ 函数, $\alpha\geqslant 0$, $g(t)\geqslant 0$, $\forall t\in\mathbb{R}^1$ (或 $\alpha\leqslant 0$, $g(t)\leqslant 0$, $\forall t\in\mathbb{R}^1$), 则 $\forall x_0\in S(x)$, (7.14) 的轨道 $\Gamma(x_0)$ 在 $T(x)$ 内旋转并返回 $S(x)$, 即利用 (7.14) 的轨道可定义同胚映射 $\mathscr{A}: S(x)\to S(x)$.

证明从略(参见[34], p. 383).

总结上述, 有

命题 7.6 (Noldus) 若引理 1~4 的条件均满足, 则方程 (7.13) 有非常数周期解.

文[34]还给此命题的诸条件以几何解释, 所用语言为该系統

的线性部分的频率响应和根轨迹图．Noldus 这工作的优点是首创用频域方法处理动力系统周期轨道存在问题，缺点是条件过于繁复，特别是引理 4 的条件．此外，Noldus[35, 36] 讨论了类似问题，方法大同小异．

Леонов[37]，Леонов 及 Буркин[38] 研究了类似的问题，[38] 证明了下列命题：

命题 7.7(Леонов, Буркин) 设(i)系统

$$\dot{x}=Ax+b\varphi(c^Tx),\ A\in\mathbb{R}^{n\times n},\ b,\ c\in\mathbb{R}^n,\ x\in\mathbb{R}^n \qquad (7.20)$$

是耗散系统，即 $\exists R>0$，使得 $\overline{\lim_{t\to\infty}}|x(t,\ x_0)|<R$，$\forall x_0\in\mathbb{R}^n$，其中 $x(t,\ x_0)$ 为系统(7.20)满足 $x(0,\ x_0)=x_0$ 的解；

(ii) $A+\varphi'(0)bc^T$ 有两特征值位在 $\mathrm{Re}(s)<-\varepsilon_0(\varepsilon_0>0)$，其余特征根皆具正实部；$\varphi(0)=0$，$k_1<\varphi'(0)<k_2$，$k_1\leqslant\varphi'(\sigma)\leqslant k_2$，$\forall\sigma\in\mathbb{R}^1$，其中可能 $k_2=\infty$ 或 $k_1=-\infty$；

(iii) 对某 $\lambda\in[0,\ \varepsilon_0]$，$\forall\omega\geqslant0$，有下列不等式：

当 $k_1\neq-\infty$，$k_2\neq\infty$，

$$\mathrm{Re}[1+k_1H(i\omega-\lambda)][1+k_2H(i\omega-\lambda)]^*\geqslant0;$$

当 $k_1=-\infty$，$k_2\neq\infty$，

$$-\mathrm{Re}[H(i\omega-\lambda)][1+k_2H(i\omega-\lambda)]^*\geqslant0;$$

当 $k_1\neq-\infty$，$k_2=\infty$，

$$\mathrm{Re}[1+k_1H(i\omega-\lambda)][H(i\omega-\lambda)]^*\geqslant0;$$

这里 $H(s)=c^T(A-sI)^{-1}b$；

(iv) 或者 $H(0)=0$，或者

$$-[H(0)]^{-1}\begin{cases}\notin[k_1,\ k_2], & \text{当 } k_1\neq-\infty,\ k_2\neq\infty;\\ \notin(-\infty,\ k_2], & \text{当 } k_1=-\infty,\ k_2\neq\infty;\\ \notin[k_1,\ \infty), & \text{当 } k_1\neq-\infty,\ k_2=\infty.\end{cases}$$

则系统(7.20)存在周期轨道．

[38]指出命题 7.7 能处理[34, 35, 36, 37]所不能处理的系统．

Smith[17] 之定理 2(p. 73)，当 $r=s=1$ 时，本质上与上命题相同，不过命题 7.7 用较强的条件代替了 Smith 的定理 2 的条件(i)，而且用频域语言表述条件(iii)．但对命题 7.7 而言，$r=1$ 是很要紧的条件．因此，我们不对命题 7.7 作进一步讨论．Smith 的定理 2[17] 已在前面 3.2 里讨论过(定理 3.2)．

Камачкин[39] 研究了下列系统的周期轨道的存在性和唯一性，工具仍是环区原理：

$$\dot{x}=Ax+Bf(\sigma),$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n$，$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$B\in\mathbb{R}^n$，$\sigma=D^Tx$，$0\neq D\in\mathbb{R}^n$，非线性函数 $f(\sigma)$ 由下式给出：

$$f(\sigma)=\begin{cases} m_1, & \sigma\in(-\infty,\ l_2), \\ m_2, & \sigma\in(l_1,\ \infty), \end{cases}$$

其中 $m_1<0<m_2$，$l_1<0<l_2$．

[39]用环区原理证明了：A 的一切特征根 λ_i 满足 $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0$，而且 $-D^TA^{-1}Bm_1>l_2$，$-D^TA^{-1}Bm_2<l_1$，则上述动力系统存在周期轨道．[39]进一步利用此系统之特点，证明了：当系统还满足条件

$$\exists\alpha\in\mathbb{R}^1,\ \alpha\neq 0,\ 使\ A^TD=\alpha D,$$

则此系统之周期轨道是唯一的．

这种具回滞曲线的系统在船舶控制中有用．

Williamson[40, 41] 运用环区原理，在频域范围内探讨了一类动力系统(类似于 Noldus[34～36])的周期轨道存在性，但条件相当繁琐，不便于应用．

7.3 原子物理学方面的应用

7.3.1 描写核自旋发生器的三维动力系统的周期轨道存在性、唯一性和稳定性

Sherman[42] 运用环区原理研究了下列三维动力系统的周

期轨道的存在性：

$$\begin{cases}\dot{x}=-\beta x+y,\\ \dot{y}=-x-\beta y(1-kz),\\ \dot{z}=\beta[\alpha(1-z)-ky^2],\end{cases} \tag{7.21}$$

其中 $\beta\geqslant0$, $\beta\alpha\geqslant0$, $k>0$. 此方程描写一个典型的核自旋发生器(nuclear spin generator)的行为. 这种核自旋发生器, 首先由 Schmelzer[156] 提出, 实质上是一个利用核磁共振现象的高频振荡器. 有关这方面的原理, 在 Abragram[157] 中有精辟的总结. 有关此方程的建立步骤, 参考 Sherman[42] 的第二节.

Sherman[42]不但用环区原理证明了系统(7.21)存在周期轨道, 而且利用 Borg 的方法证明了此系统的周期轨道是唯一的和稳定的.

为了运用环区原理, 先讨论系统的奇点. 当 $\beta\alpha\neq0$, (7.21)有唯一奇点 $x=y=0$, $z=1$, 这是唯一有物理意义的奇点. 令 $\tilde{z}=1-z$, 可改写(7.21)为

$$\dot{\tilde{X}}=C\tilde{X}+\beta kF(\tilde{X}), \tag{7.22}$$

其中

$$\tilde{X}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ \tilde{z}\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-\beta & 1 & 0\\ -1 & \beta(k-1) & 0\\ 0 & 0 & -\beta\alpha\end{bmatrix},\quad F(\tilde{X})=\begin{bmatrix}0\\ -y\tilde{z}\\ y^2\end{bmatrix}.$$

当 $\det C\neq0$ 时, 此系统之奇点性态, 完全由其线性部分: $\dot{\tilde{X}}=C\tilde{X}$ 决定. C 的特征值是 $\lambda_{1,2}=(1/2)[\beta(k-2)\pm(\beta^2k^2-4)^{1/2}]$, $\lambda_3=-\beta\alpha$. 如略去涉及参数之间出现等式的情形(这在物理上是不重要的情形), 则有下列可能:

(甲) $\beta\alpha>0$, $\beta k<2$, $k>2\Rightarrow\mathrm{Re}(\lambda_{1,2})>0$, $\lambda_3<0$;

(乙) $\beta\alpha>0$, $\beta k<2$, $k<2\Rightarrow\mathrm{Re}(\lambda_{1,2})<0$, $\lambda_3<0$;

(丙) $\beta\alpha>0$, $\beta k>2$, $k>2$, $1/(k-1)>\beta^2\Rightarrow\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\lambda_3<0$;

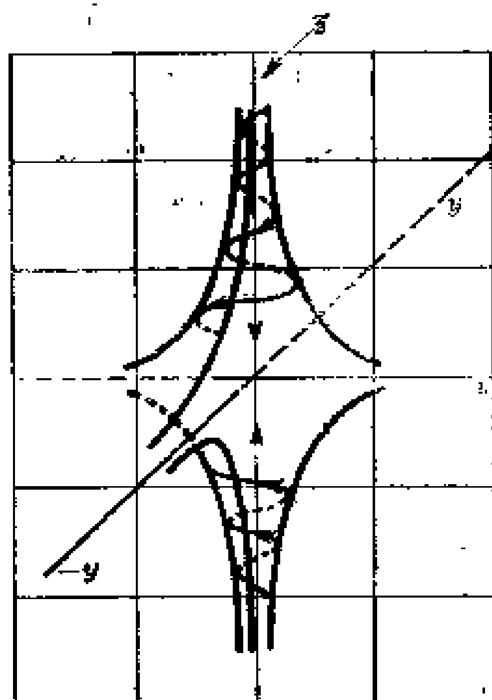


图 16

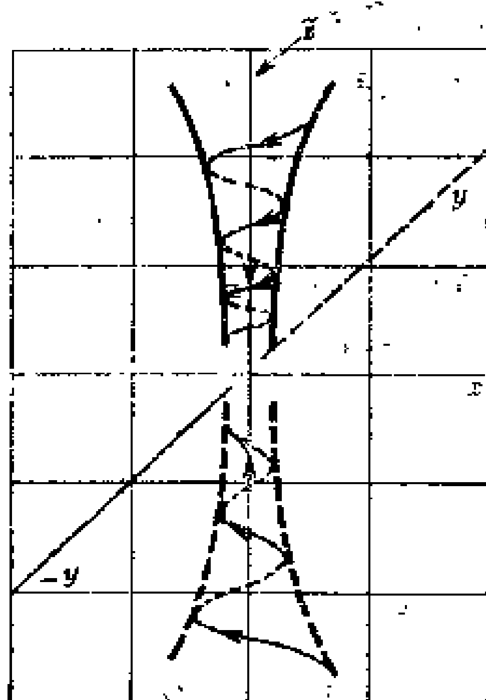


图 17

（丁）$\beta\alpha>0$, $\beta k>2$, $k<2$, $1/(k-1)>\beta^2\Rightarrow\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$, $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\lambda_3<0$;

（戊）$\beta\alpha>0$, $\beta k>2$; $1/(k-1)<\beta^2\Rightarrow\lambda_{1,2}\in\mathbb{R}^1$, $\lambda_1\lambda_2<0$, $\lambda_3<0$.

在情形(甲)，奇点是鞍点-焦点(图16)；在此情形，系统(7.21)可能存在周期轨道；情形(乙)，奇点是稳定的结点-焦点(图17)；情形(丙)，奇点是鞍点-结点；情形(丁)，奇点是稳定结点；情形(戊)，奇点是鞍点-结点．归纳起来，有图18.

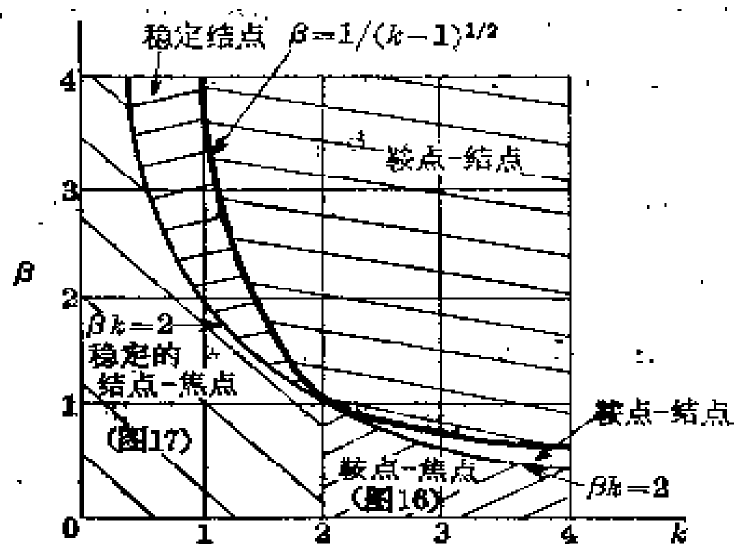


图 18

其次转向系统(7.22)的大范围性态，先证明(7.22)的解的有界性．

命题 7.8(Sherman[42])　$\forall k$, $\beta>0$ 及 $\alpha>0$, 系统(7.22)的一切解均有界．当 $t\to\infty$ 时，系统的每个轨道均进入球 $\{(x, y, \tilde{z})\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+(\tilde{z}-1)^2\leqslant s^2\}$，其中 $s>s_0$，而 $s_0=1$（当 $0<\alpha\leqslant 2$），$s_0=\alpha/2(\alpha-1)^{1/2}$（当 $2<\alpha$）.

证明　令 $S(s)=\{(x, y, \tilde{z})\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+(\tilde{z}-1)^2=s^2\}$，研究 $\dot{s}$．改用圆柱坐标，(7.22)可改写为

$$\begin{cases}\dot{r}=-\beta r[1-k(1-\tilde{z})\sin^2\theta],\\ \dot{\theta}=1+(\beta k/2)(1-\tilde{z})\sin 2\theta,\\ \dot{\tilde{z}}=\beta(-\alpha\tilde{z}+kr^2\sin^2\theta).\end{cases}\tag{7.23}$$

由此可得
$$s\dot{s}=-\beta[r^2+\alpha\tilde{z}(\tilde{z}-1)].$$
当 $\tilde{z}\geqslant 1$，$\dot{s}<0$，$\forall s>0$，$\beta>0$；当 $\tilde{z}\leqslant 0$，$\dot{s}<0$，$\forall s>1$；当 $0<\tilde{z}<1$，改写 $s\dot{s}=-\beta[s^2-(1-\tilde{z})^2-\alpha\tilde{z}(1-\tilde{z})]$．因此，$\dot{s}<0$（在 $\beta>0$ 时）$\Rightarrow$
$$s^2>(1-\tilde{z})^2+\alpha\tilde{z}(1-\tilde{z})=P(\tilde{z}, \alpha).$$
当 $0<\alpha\leqslant 2$，$0\leqslant\tilde{z}<1$，$P(\tilde{z}, \alpha)$ 在 $\tilde{z}=0$ 达极大值 1．所以，当 $0<\tilde{z}<1$，$s^2\geqslant 1\Rightarrow\dot{s}<0$；当 $\alpha>2$，$P(\tilde{z}, \alpha)$ 在 $\tilde{z}=(\alpha-2)/2(\alpha-1)<1$ 处达极大值 $\alpha^2/4(\alpha-1)$，故此时有 $s^2>\alpha^2/4(\alpha-1)\Rightarrow\dot{s}<0$．于是，$\forall k$，$\beta>0$ 及 $\alpha>0$，可找出半径 $s_0=1$（$0<\alpha\leqslant 2$ 时）及 $s_0=\alpha/2(\alpha-1)^{1/2}$（$2<\alpha$ 时），使得对一切 $s>s_0$，$s^2=r^2+(\tilde{z}-1)^2$ 具性质 $\dot{s}<0$．这表明：当 $t\to\infty$ 时，(7.22)的一切轨道都进入 $\{(x, y, \tilde{z})\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+(\tilde{z}-1)^2\leqslant s^2\}$ 内．∎

由于物理上的限制，参数 $\alpha\in(0, 1]$．所以，$\forall k$，$\beta>0$，系统(7.22)的一切轨道，当 $t\to\infty$ 时，进入 $S(1)=\{(x, y, \tilde{z})\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+(\tilde{z}-1)^2=1\}$ 内（除却奇点(0, 0, 0)）.

以下逐步构造所需之环区．

我们的出发点是 $S(1)$，它可充当环区的外边界，只要设法挖掉其上的奇点(0, 0, 0)，再在 $S(1)$ 所围区域钻一洞，同时去掉 $\tilde{z}$ 轴，便可获得所需的不变环区．

引理 1(Sherman[42])　设 $\alpha\in(0, 1]$，$\beta k\in(0, 2)$，$\beta^2\in(0,$

$2/7)$，$\tilde{z}\in(0,\ 2)$，以及

$$2<[1+5\beta^2/2-(1-3\beta^2-7\beta^4/4)^{1/2}]/2\beta^2<k,$$
$$k<[1+5\beta^2/2+(1-3\beta^2-7\beta^4/4)^{1/2}]/2\beta^2,$$

则系统(7.22)的轨道(除却在 $x=y=0$ 上的以外)皆进入不变闭集 R_2 之内。R_2 是由 $S(1)$，锥面 C 和曲面 H_2 围成(不含奇点)。C，H_2 的方程如下：

$$C:\ \tilde{z}-(k-2)/2k=r[(k-1)/\alpha]^{1/2},\ r=(x^2+y^2)^{1/2};$$
$$H_2:\ x^2-2\beta xy+[1-\beta^2(k-2)]y^2=f\exp(2k\tilde{z}/\alpha),$$

其中

$$0<f<(\alpha/k^2)\{(k-2)[1-\beta^2(k-1)]-\beta^2k/2\}\exp(-2k\tilde{z}_u/\alpha),$$
$$\tilde{z}_u=\{(k-1)(k-2)/k^2[1-\beta-\beta^2(k-2)/2-\beta^3(k-2)^2/4]\}^{1/2}+(k-2)/2k.$$

证明 令 $\|\tilde{X}\|^2=\tilde{z}^2+r^2$，由(7.23)得 $\|\tilde{X}\|$，沿轨道的微商为

$$\|\tilde{X}\|'=-\beta(r^2+\alpha\tilde{z}^2-r^2k\sin^2\theta).$$

所以，当 $\alpha\tilde{z}^2>r^2(k-1)$，$\|\tilde{X}\|'<0$，从而在锥面

$$\tilde{z}=r[(k-1)/\alpha]^{1/2}$$

内的一切轨道皆趋于原点。于是，自此锥面内出发的一切轨道必离开锥面

$$\tilde{z}-\tilde{z}_0=mr,$$

其中 $\tilde{z}_0>0$，$m>0$ 是这样选取的：$\tilde{z}-\tilde{z}_0=mr$ 与 $S(1)$ 交线之 $\tilde{z}$ 坐标大于 $\tilde{z}=2(k-1)/(k-1+\alpha)$

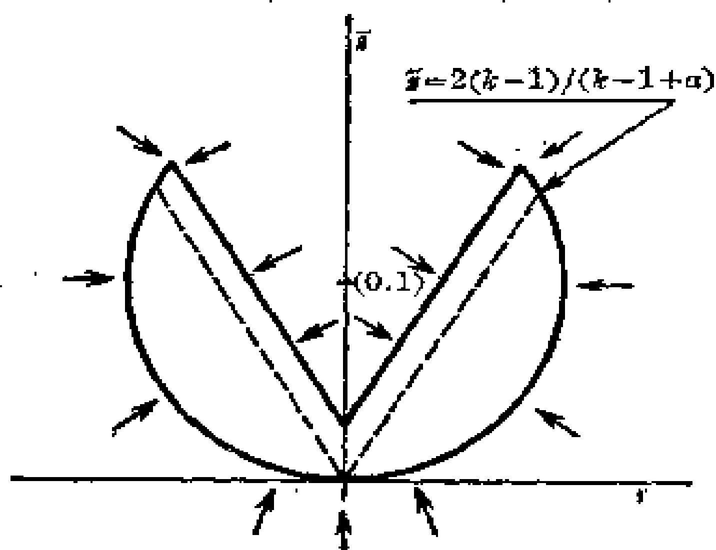


图 19

(这是锥面 $\tilde{z}=r[(k-1)/2]^{1/2}$ 与 $S(1)$ 相交之 $\tilde{z}$ 坐标)。特别，自锥

面 C 内出发的一切轨道皆离开 C。所以，由 C 与 $S(1)$ 所交截出的区域是(7.16)的不变集合．除奇点 $x=y=\tilde{z}=0$ 外，一切自此区域边界出发的轨道皆进入此区域内．参见图 19(此不变集的 θ 截面)。

为了挖掉在原点处的奇点，我们利用曲面 H_2。现来证明自 H_2 出发的轨道进入不变集合 R_2 之内．曲面 H_2 的外向单位法向量由公式

$$\widetilde{X}_N=-(\partial\widetilde{X}/\partial x\times\partial\widetilde{X}/\partial y)/\|\partial\widetilde{X}/\partial x\times\partial\widetilde{X}/\partial y\|$$

给出，利用 H_2 的方程和(7.22)，可得 $\widetilde{X}_N$ 与 $\dot{\widetilde{X}}$ 的内积：

$$\begin{aligned}&\langle\dot{\widetilde{X}},\ \widetilde{X}_N\rangle(fk/\beta\alpha)\exp(2k\tilde{z}/\alpha)\\&=k\tilde{z}x^2-\beta k\tilde{z}xy+y^2\{(k-2)[1-\beta^2(k-1)]\\&\quad-(fk^2/\alpha)\exp(2k\tilde{z}/\alpha)\}.\end{aligned}$$

因 $(fk/\beta\alpha)>0$，$k\tilde{z}>0$，故当

$$\begin{aligned}&(4k\tilde{z})\{(k-2)[1-\beta^2(k-1)]\\&\quad-(fk^2/\alpha)\exp(2k\tilde{z}/\alpha)\}>(\beta k\tilde{z})^2,\end{aligned}$$

上式右端的二次型(从而 $\langle\dot{\widetilde{X}},\ \widetilde{X}_N\rangle$)是正定的．注意及本引理假设当 $\tilde{z}<\tilde{z}_u$ 时有下列不等式：

$$\begin{aligned}&(\alpha/k^2)\{(k-2)[1-\beta^2(k-1)]-\beta^2k/2\}>f\exp(2k\tilde{z}/\alpha)\\&\Rightarrow(\alpha/k^2)\{(k-2)[1-\beta^2(k-1)]-\beta^2k\tilde{z}/4\}\exp(-2k\tilde{z}/\alpha)>f\\&\Rightarrow(4k\tilde{z})\{(k-2)[1-\beta^2(k-1)]-(fk^2/\alpha)\exp(2k\tilde{z}/\alpha)\}\\&\quad>(\beta k\tilde{z})^2.\end{aligned}$$

于是，余下的工作是找出 $\tilde{z}_u$(这是 H_2 与 C 交点的最大 $\tilde{z}$ 坐标的上界)．为了求出这些交点，用圆柱坐标表示 H_2 的方程，得到

$$\begin{aligned}&r^2[1-\beta^2(k-2)/2+\beta\sin 2\theta+(\beta^2/2)(k-2)\cos 2\theta]\\&=f\exp(2k\tilde{z}/\alpha).\end{aligned}$$

当 $\tan\theta=2/\beta(k-2)$ 时，上式之 r 达最大，把此 θ 值代入上式，得

$$\begin{aligned}&r^2\{1-\beta^2(k-2)/2-[2\beta+\beta^3(k-2)^2/2]/[4+\beta^2(k-2)^2]^{1/2}\}\\&=f\exp(2k\tilde{z}/\alpha).\end{aligned}$$

由此方程及 C 之方程($\tilde{z}-(k-2)/2k=r[(k-1)/\alpha]^{1/2}$), 求出 H_2 与 C 交点之 $\tilde{z}$ 坐标之上界满足下式:

$$
\begin{aligned}
&[\alpha/(k-1)][\tilde{z}-(k-2)/2k]^2\{1-\beta^2(k-2)/2\\
&\quad-[2\beta+\beta^3(k-2)^2/2]/[4+\beta^2(k-2)^2]^{1/2}\}\\
&=(\alpha/k^2)\{(k-2)[1-\beta^2(k-1)-\beta^2k/2\}.
\end{aligned}
$$

简化之, 得出 $\tilde{z}_u$

$$
\begin{aligned}
\tilde{z}_u=&\{(k-1)(k-2)/k^2[1-\beta-\beta^2(k-2)/2\\
&-\beta^3(k-2)^2/4]\}^{1/2}+(k-2)/2k.
\end{aligned}
$$

这就是本引理假设中所列出的 $\tilde{z}_u$. 又引理假设中有关 k 的限制来自 $f>0$ 这要求. 因 $f>0\Rightarrow(k-2)[1-\beta^2(k-1)]-\beta^2k/2>0$, 由此引出关于 k 的不等式. 要求 $k\in\mathbb{R}^1$, 导致不等式 $1-3\beta^2-7\beta^4/4>0$, 从而要求 $\beta^2<2/7$.

注意到可使定义 H_2 的方程中的 f 足够小, 以使 H_2 在 $S(1)$ 内所挖之洞充分窄, 保证除却沿 $\tilde{z}$ 轴($x=y=0$)的轨道外, 其它轨道均进入 R_2.

命题 7.9(Sherman [42]) 在引理 1 的假设条件下, 系统(7.22)在 R_2 内存在周期轨道.

证明 由引理 1, 已找到不变集 R_2, 它是一环区. 只要证明(7.2)的轨道在 R_2 内旋转, 以便运用环区原理. 注意及任取固定的 θ_0, $\theta=\theta_0$ 与 R_2 之交集是一个闭、单连通区. 可以证明, 当 $0<\beta k<2$, $0<\tilde{z}<2$ 时, (7.23)的轨道定义了一个从这交集到本身的同胚映射. 事实上, 由(7.23)第二式看出, $0<\beta k<2$, $0<\tilde{z}<2\Rightarrow\dot{\theta}>0$. ∎

如果再限制参数 β 取微小值, $0<k-2\leqslant\beta$, 可以运用 Borg 的方法, 证明 R_2 内的周期轨道是唯一的和稳定的.

为了建立 Borg 定理(定理 5.1)[103] 所要求的收缩性质, Sherman[42] 利用 Ляпунов 定理(Гантмахер[142]), 找出一适当的度量函数. 这时要对 $\beta(>0)$ 限制为微小值, 而且 $0<k-2$

$\leqslant\beta$.

因目前限制 β 微小，故若忽略 β 的高次项，上述的引理 1 可改述为(这时对区域 R_2 的参数所作的限制可简化)：

引理 1β(Sherman[42]) 在略去 β 高次项(二次及二次以上)时，当 $0\leqslant\alpha<1$, $2\beta<\beta k<2$, $2<k$, 除却 $x=y=0$ 外，系统(7.22)，即

$$\dot{\widetilde{X}}=A\widetilde{X}+\beta kF(\widetilde{X}),$$

$$\widetilde{X}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ \widetilde{z}\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}-\beta & 1 & 0\\ -1 & \beta(k-1) & 0\\ 0 & 0 & -\beta\alpha\end{bmatrix},\quad F(\widetilde{X})=\begin{bmatrix}0\\ -y\widetilde{z}\\ y^2\end{bmatrix},$$

的一切轨道均进入不变闭区域 $R_{2\beta}$(不含奇点)；$R_{2\beta}$ 是由球面 $S(1)$，锥面 C 以及曲面 $H_{2\beta}$ 所围成；

$$S(1)=\{(x,y,\widetilde{z})\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+(\widetilde{z}-1)^2=1\},$$

$$C:\ \widetilde{z}-(k-2)/2k=r[(k-1)/\alpha]^{1/2},\quad r=(x^2+y^2)^{1/2},$$

$$H_{2\beta}:\ r^2(1+\beta\sin^2\theta)=f\exp(2k\widetilde{z}/\alpha)<(\alpha/k^2)(k-2), \tag{7.24}$$

$$0<f<(\alpha/k^2)(k-2)\exp(-2k\widetilde{z}_u/\alpha), \tag{7.25}$$

$$\widetilde{z}_u=[(k-1)(k-2)]^{1/2}(2+\beta)/2k+(k-2)/2k.$$

而且在 $R_{2\beta}$ 内存在周期轨道。

按照 5.1 节 Borg 定理的精神，如能证明 $R_{2\beta}$ 内轨道间之距离随时间增大而减小，则 $R_{2\beta}$ 内的周期轨道是唯一的和渐近稳定的。以下将证明当 $0<k-2\leqslant\beta$, β 微小时，采用一适当的度量函数，$R_3(\supset R_{2\beta})$ 内的轨道具有这种收缩性质(自同一 θ_0 平面出发的轨道，当 θ 增加 2π，彼此间的距离减小)。

本节余下的工作分三部分：

(甲)区域 R_3 内的收缩性质；

(乙)$R_{2\beta}$ 与 R_3 的交集；

(丙)$R_{2\beta}$ 内周期轨道的唯一性和稳定性。

现分别进行如下：

(甲)区域 R_3 内的收缩性质.

回顾系统(7.23),即

$$\begin{cases} \dot{r}=-\beta r[1-k(1-\tilde{z})\sin^2\theta], \\ \dot{\theta}=1+(\beta k/2)(1-\tilde{z})\sin 2\theta, \\ \dot{\tilde{z}}=\beta(-\alpha\tilde{z}+kr^2\sin^2\theta). \end{cases}$$

当 β 微小, 仅保留 β 一次项时, 有 $\dot{r}=dr/dt=dr/d\theta$, $\dot{\tilde{z}}=d\tilde{z}/dt=d\tilde{z}/d\theta$. 如在初值条件中包括参数 β, 可得下列系统:

$$dY/d\theta=\begin{bmatrix} dr/d\theta \\ d\tilde{z}/d\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\beta r[1-k(1-\tilde{z})\sin^2\theta] \\ \beta(-\alpha\tilde{z}+kr^2\sin^2\theta) \end{bmatrix}$$

$$=\beta G(\theta, Y), \tag{7.26}$$

其中

$$Y=Y(\theta, Y_0, \beta)=\begin{bmatrix} r \\ \tilde{z} \end{bmatrix}, Y_0=Y(\theta_0, Y_0, \beta)=\begin{bmatrix} r_0 \\ \tilde{z}_0 \end{bmatrix}.$$

定义由初值 Y_0 的改变量 δY_0 所引起的 Y 的改变量 δY 为

$$\delta Y=M(\theta, Y_0, \beta)\delta Y_0, \tag{7.27}$$

其中

$$M(\theta, Y_0, \beta)=\partial Y(\theta, Y_0, \beta)/\partial Y_0, \tag{7.28}$$

$$M(\theta_0, Y_0, \beta)=I. \tag{7.29}$$

希望选取某适当的度量函数, 使(7.27)所定义的映射在某区域(包含 R_{3s})内对于 θ 来说是收缩的. 如用普通的欧氏度量 $\langle\delta Y, \delta Y\rangle^{1/2}$, 不能成功. 现转而考虑另一度量

$$\langle\delta Y, P\delta Y\rangle^{1/2}, \tag{7.30}$$

其中 $P(\theta, Y_0, \beta)$ 是对称实阵(正定的). 现探求在何条件下, 对于 $\theta=\theta_0+2\pi$, δY 之长度小于 δY_0 的长度, 即何时可有

$$\langle\delta Y, P\delta Y\rangle<\langle\delta Y_0, P\delta Y_0\rangle. \tag{7.31}$$

由于 $\langle\delta Y, P\delta Y\rangle=\langle M\delta Y_0, PM\delta Y_0\rangle=\langle\delta Y_0, M^TPM\delta Y_0\rangle$, 故(7.31)等价于

$$\langle\delta Y_0, [M^TPM-P]\delta Y_0\rangle<0. \tag{7.32}$$

现把 Y, M, P 按 β 展开, 并仅保留 β 的一次项, 可得

$$Y(\theta, Y_0, \beta)=Y^{(0)}(\theta, Y_0)+\beta Y^{(1)}(\theta, Y_0), \tag{7.33}$$

其中 $Y^{(1)}=\partial Y(\theta, Y_0, 0)/\partial\beta$. 由(7.26), $dY^{(0)}/d\theta=0$, 所以若设 $Y^{(1)}(\theta_0, Y_0)=0$, 则 $Y^{(0)}=Y_0$, 而且

$$dY^{(1)}/d\theta=G(\theta, Y^{(0)})=G(\theta, Y_0). \tag{7.34}$$

对于 M, 如令

$$N(\theta, Y_0)=\partial Y^{(1)}/\partial Y_0, \tag{7.35}$$

则由(7.28)及(7.33)得

$$M(\theta, Y_0, \beta)=I+\beta N(\theta, Y_0). \tag{7.36}$$

对于 P, 有 $P(\theta, Y_0, \beta)=P^{(0)}(\theta, Y_0)+\beta P^{(1)}(\theta, Y_0)$. 于是有

$$M^T PM-P=\beta[P^{(0)}N+(P^{(0)}N)^T]. \tag{7.37}$$

为了证明(7.32)左端的二次型是负定的, 需证明存在阵 $P^{(0)}$(正定)使得当 $\theta=\theta_0+2\pi$, 阵(7.37)是负定的. 在这方面, 我们有下列 Ляпунов 定理:

Ляпунов 定理(Гантмахер[142]) 设 $N\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 则

$\exists P^{(0)}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $P^{(0)}=[P^{(0)}]^T$, 正定, 使 $P^{(0)}N+(P^{(0)}N)^T=-I$ $\Leftrightarrow N$ 是稳定的(即 N 的一切特征根均具负实部).

于是, 我们的问题便转化为: 寻求在何条件下 $N(\theta_0+2\pi, Y_0)$ 的特征根皆具负实部. 我们证明下列引理:

引理 2([42]) $N(\theta_0+2\pi, Y_0)$ 的特征根在区域 R_3 内均具负实部, 这里 R_3 是由下列不等式确定的区域(参见图 20):

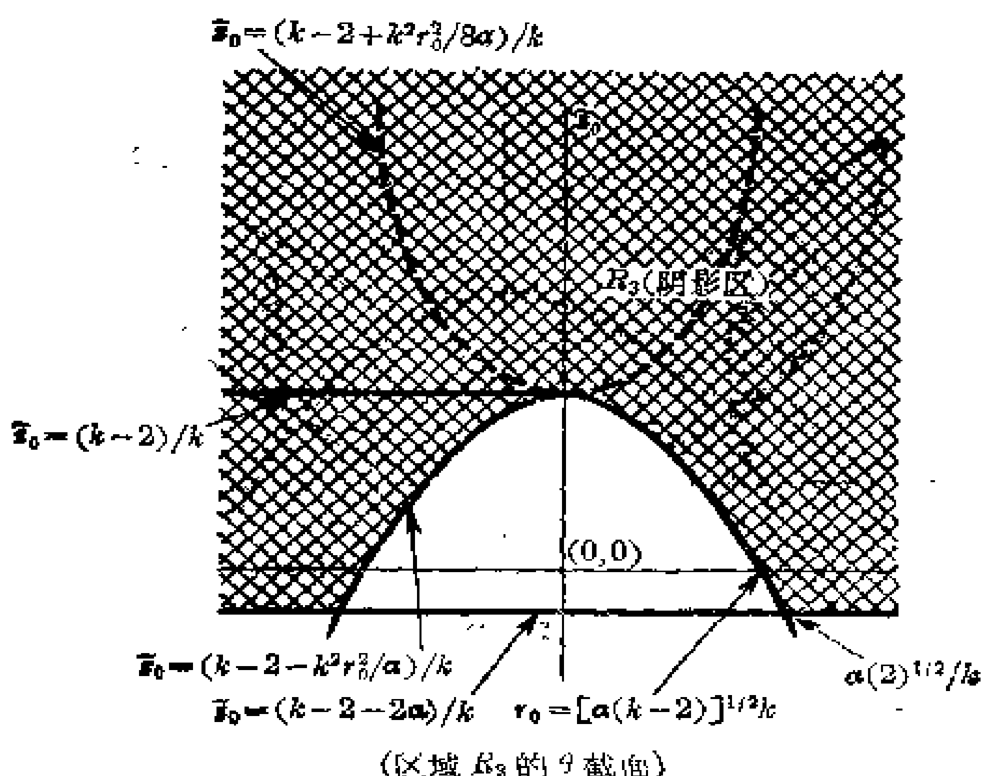
$$\tilde{z}_0>(k-2-k^2r_0^2/\alpha)/k, \tag{7.38}$$

$$\tilde{z}_0>(k-2-2\alpha)/k. \tag{7.39}$$

证明 由(7.29), (7.34)及(7.35)得 $\partial(dY^{(1)}/d\theta)/\partial Y_0=dN/d\theta$, 所以 $dN/d\theta=\partial G(\theta, Y_0)/\partial Y_0$, $N(\theta_0, Y_0)=0$. 由(7.26)得

$$\partial G(\theta, Y_0)/\partial Y_0=\begin{bmatrix}-1+k(1-\tilde{z}_0)\sin^2\theta & -r_0k\sin^2\theta \\ 2kr_0\sin^2\theta & -\alpha\end{bmatrix}.$$

因此, $$N(\theta_0+2\pi, Y_0)=\pi\begin{bmatrix}-2+k(1-\tilde{z}_0) & -kr_0 \\ 2kr_0 & -2\alpha\end{bmatrix}.$$



(区域 R_3 的 θ 截面)

图 20

当 $\pi[k(1-\tilde{z}_0)-2\alpha-2]<0$, $\pi^2\{2k^2r_0^2-2\alpha[k(1-\tilde{z}_0)-2]\}>0$(即上阵之迹为负, 其行列式为正), 则 $N(\theta_0+2\pi, Y_0)$之特征根均具负实部. 由定义 R_3 的不等式可知, 在 R_3 内这些条件成立. ▌

顺便指出, 可以具体写出满足上述要求的对称阵 $P^{(0)}$, 例如:

$$P^{(0)}=\begin{bmatrix}2+(c-b)^2/2 & -(b+c)/2\\ -(b+c)/2 & 1\end{bmatrix},$$

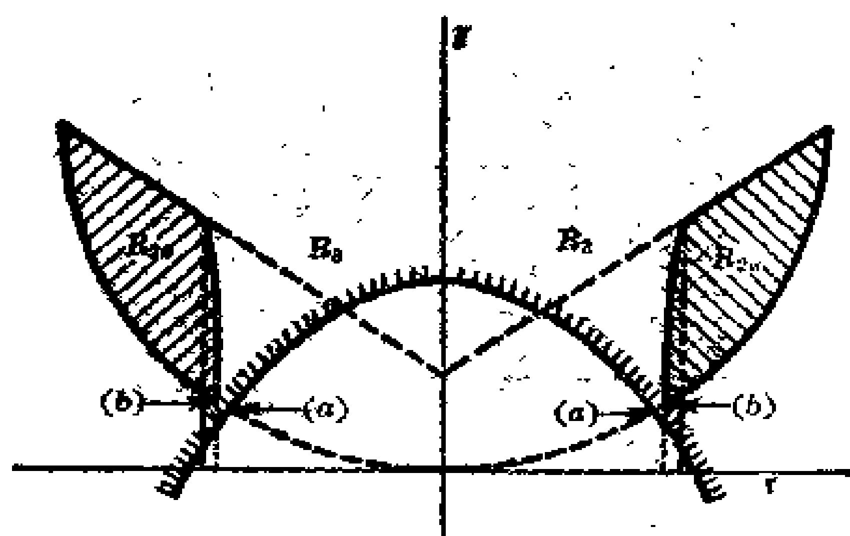
其中 $b=[k(1-\tilde{z}_0)-2]/kr_0$, $c=2\alpha/kr_0$, $r_0>0$.

(乙)R_3 与 $R_{2\beta}$ 之交集.

希望 $R_{2\beta}\subset R_3$. 为此, 设 $0<k-2\leqslant\beta$, β 微小, 而且 $2\beta<\alpha\leqslant 1$, 则可证明 $R_{2\beta}\subset R_3$.

先求出 R_3 的边界(7.38)与球面 $S(1)$之交点的 $\tilde{z}$ 坐标, 然后证明它小于 $H_{2\beta}$ 边界(7.24)之最小向径与 $S(1)$之交点的 $\tilde{z}$ 坐标. 参考图 21, 这是 $\theta=45°$, $225°$ 的截面, 这时 $H_{2\beta}$ 之边界(7.24)之向径最小.

在 R_3 的边界 (7.38) 与 $S(1)$ 之交点(图 21 中的 (a)), 有



$R_{2\beta}$ 与 R_3 的交集($\theta=45°$; $225°$)

图 21

$1-(\tilde{z}-1)^2=\alpha(k-2)/k^2-\alpha\tilde{z}/k$, 由此得出

$$\tilde{z}_a=(1/2k)\{2(k-2)$$
$$+(\alpha+4)\{1-[1+4(k-2)(k+2)/(\alpha+4)^2]^{1/2}\}\}.$$

对于 $k-2=\beta$, β 微小时, $\tilde{z}_a=\beta\alpha/k(\alpha+4)$. 在 $H_{2\beta}$ 边界(7.24)与 $S(1)$ 之交点(图 21 中的(b)), 有 $1-(\tilde{z}-1)^2=f(1-\beta)e^{2k\tilde{z}/\alpha}$. (因 $H_{2\beta}$ 之最小向径 r 满足 $r^2=f(1-\beta)\exp(2k\tilde{z}/\alpha)<(1-\beta)\alpha(k-2)/k^2$.) 当 $\tilde{z}_b$ 微小时, 此式可简化为 $\tilde{z}^2-2\tilde{z}[1-f(1-\beta)k/\alpha]+f(1-\beta)=0$. 由此可求出

$$\tilde{z}_b=1-f(1-\beta)k/\alpha-\{[1-f(1-\beta)k/\alpha]^2-f(1-\beta)\}^{1/2}.$$

当 $k-2=\beta$, β 微小时, 由(7.25)知, $0<f<\beta\alpha/k^2$; 因此, 在略去 β 高次项后, $\tilde{z}_b=f/2$.

注意及 $2\beta<\alpha\leqslant1$, 从而 $\alpha+4>2k$, 故 $2\beta\alpha/k(\alpha+4)<\beta\alpha/k^2$; 若取 $f\in(2\beta\alpha/k(\alpha+4),\beta\alpha/k^2)$, 则 $\beta\alpha/k(\alpha+4)<f/2$, $\tilde{z}_a<\tilde{z}_b$. 于是在此参数范围, $R_{2\beta}\subset R_3$.

(丙) $R_{2\beta}$ 内周期轨道的唯一性和稳定性.

我们已建立一闭区域 $R_{2\beta}$, 当 $\beta>0$ 微小, 而且 $0<k-2\leqslant\beta$, $2\beta<\alpha\leqslant1$ 时, 在 $R_{2\beta}$ 内存在周期轨道以及 $R_{2\beta}$ 内系统(7.22)具有收缩性质. 于是可以证明下列

命题 7.10(Sherman[42]) 设 $\beta>0$ 微小，$0<k-2\leqslant\beta$，$2\beta<\alpha\leqslant 1$，则在 $R_{2\beta}$(其定义见引理 1β)内，系统(7.22)[(7.23)，(7.26)]存在唯一的周期轨道 γ，且 $\Omega_p=\gamma$，$\forall p\in R_{2\beta}$；从而除却位在 $\tilde{z}$ 轴($x=y=0$)上的轨道外，(7.22)的其它轨道之 ω 极限点集为 γ.

证明 由(甲)，(乙)知，$R_{2\beta}$ 内相邻的轨道，当 θ 或 t 趋于 ∞ 时，互相趋近而且保持在 $R_{2\beta}$ 内. 对任一固定 θ_0，$\theta=\theta_0$ 与 $R_{2\beta}$ 之交集为二维区域(有界、闭)，所以可用有限个邻域把它覆盖. 因此，由这个二维区域出发的轨道，当 $t\to\infty$ 时，互相趋近. 从而它们的 ω 极限点集相同. 由于在 $R_{2\beta}$ 内存在周期轨道 γ，而 $\Omega_q=\gamma$，$\forall q\in\gamma$，所以 $\Omega_p=\gamma$，$\forall p\in R_{2\beta}$. 此外，除 $x=y=0$ 上之轨道外，(7.16)的其它轨道，当 $t\to\infty$ 皆进入 $R_{2\beta}$，所以 γ 亦为它们的 ω 极限点集. ∎

7.3.2 描写核反应堆的三维动力系统的周期轨道存在性

Troy[43] 利用环区原理讨论了一个描述核反应堆的三维动力系统的周期轨道存在性问题. 这个核反应堆的微分方程是由 Vreeke & Sandquist[158] 在 1970 给出的. 此系统为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1[\gamma_1(1-x_2)+\gamma_2(1-x_3)]=F^1(x,\gamma),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=\gamma_3(x_1-x_2)=F^2(x,\gamma),\\ \dfrac{dx_3}{dt}=\gamma_4(x_1-x_3)=F^3(x,\gamma),\end{cases}\tag{7.40}$$

其中 x_1 是规范化中子密度，x_2 及 x_3 是规范化温度，x_2 是燃料温度而 x_3 是冷却剂温度；$\gamma_3>0$，$\gamma_4>0$ 是热传递系数；γ_1 及 γ_2 是规范化、有效的中子寿命参数. 表达式 $\rho=\gamma_1(1-x_2)+\gamma_2(1-x_3)$ 叫做反应率. 在(7.40)中，$x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$，(7.40)有两奇点：$x=(0,0,0)$(这对应于关闭状态)，$x=(1,1,1)\triangleq\mathbf{1}$(代表反应堆的工作状态).

先讨论奇点. 把(7.40)在工作状态 $\bar{x}=(1,\ 1,\ 1)$ 处线性化，得

$$\dot{Y}=AY, \tag{7.41}$$

其中
$$A=F_x(1,\ \gamma)=\begin{bmatrix} 0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 \\ \gamma_3 & -\gamma_3 & 0 \\ \gamma_4 & 0 & -\gamma_4 \end{bmatrix}.$$

设 γ_3^0, γ_4^0 是任两正实数, $\gamma_4^0>\gamma_3^0$, 令 $\gamma_3=\gamma_3^0$, $\gamma_4=\gamma_4^0$. 作了这种限制后, Poore[159] 证明了: A 有两个纯虚特征根 $\Leftrightarrow \gamma_1=\gamma_1^0$, $\gamma_2=\gamma_2^0$, 这里

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_1^0=\frac{\gamma_4^0(\omega_0^2+(\gamma_3^0)^2)}{\gamma_3^0(\gamma_4^0-\gamma_3^0)},\quad \gamma_2^0=\frac{-\gamma_3^0(\omega_0^2+(\gamma_4^0)^2)}{\gamma_4^0(\gamma_4^0-\gamma_3^0)},\\ &\omega_0^2=\gamma_1^0\gamma_3^0+\gamma_3^0\gamma_4^0+\gamma_2^0\gamma_4^0>0. \end{aligned}\right\} \tag{7.42}$$

当 γ_i^0, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 满足条件

$$\gamma_1^0\gamma_3^0/(\gamma_2^0\gamma_4^0)<-1,$$

存在一最大的 $\delta(>0)$, 使得 $(\gamma_2^0-\delta,\ \gamma_2^0)\subseteq(-\gamma_1^0,\ \gamma_2^0)$ 及

$$\gamma_1^0\gamma_3^0/(\gamma_2\gamma_4^0)<-1,\ \forall\gamma_2\in(\gamma_2^0-\delta,\ \gamma_2^0). \tag{7.43}$$

当 $\gamma_1=\gamma_1^0$, $\gamma_3=\gamma_3^0$, $\gamma_4=\gamma_4^0$, $\gamma_2\in(-\gamma_1^0,\ \gamma_2^0)$时, Poore[159]还证明了操作状态是不稳定的.

Troy[43] 证明了: 对每个 $\gamma_2\in(\gamma_2^0-\delta,\ \gamma_2^0)$, 系统(7.40)至少有一周期轨道. 具体地说, Troy 考虑了下列系统:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1[\gamma_1^0(1-x_2)+\gamma_2(1-x_3)], \\ \dfrac{dx_2}{dt}=\gamma_3^0(x_1-x_2), \\ \dfrac{dx_3}{dt}=\gamma_4^0(x_1-x_3), \end{cases} \tag{7.44}$$

其中 $\gamma^0=(\gamma_1^0,\gamma_2^0,\gamma_3^0,\gamma_4^0)$满足条件(7.42), (7.43), 而 $\gamma_2\in(\gamma_2^0-\delta,\ \gamma_2^0)$.

先证两条引理.

引理 1(Troy[43]) 设 $\pi(t)=(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$ 是系统(7.44)满足初始条件 $x_1(0)>0,\ x_2(0)\geqslant0,\ x_3(0)\geqslant0$ 的解，则

$$x_1(t)>0,\ x_2(t)>0,\ x_3(t)>0,\ \forall t>0.$$

证明 可算出 $x_1(t)=x_1(0)\exp\left(\int_0^t\rho(s)ds\right),\ \forall t\geqslant0$，其中 $\rho(s)$ 是反应率函数．于是 $x_1(t)>0,\ \forall t>0$．若 $x_2(0)=0$，则由(7.44)的第二方程得到 $\dot{x}_2(0)=\gamma_3^0x_1(0)>0$．否则 $x_2(0)>0$．在这两情形，假设存在某 $T>0$(取这种 T 中之最小者)使 $x_2(T)=0$，则有 $\dot{x}_2(T)\leqslant0$．但是，由(7.44)的第二个方程得 $\dot{x}_2(T)=\gamma_3^0x_1(T)>0$，立得矛盾．所以 $x_2(t)>0,\ \forall t>0$；同理可证 $x_3(t)>0,\ \forall t>0$． ∎

其次，定义集合(见图 22)

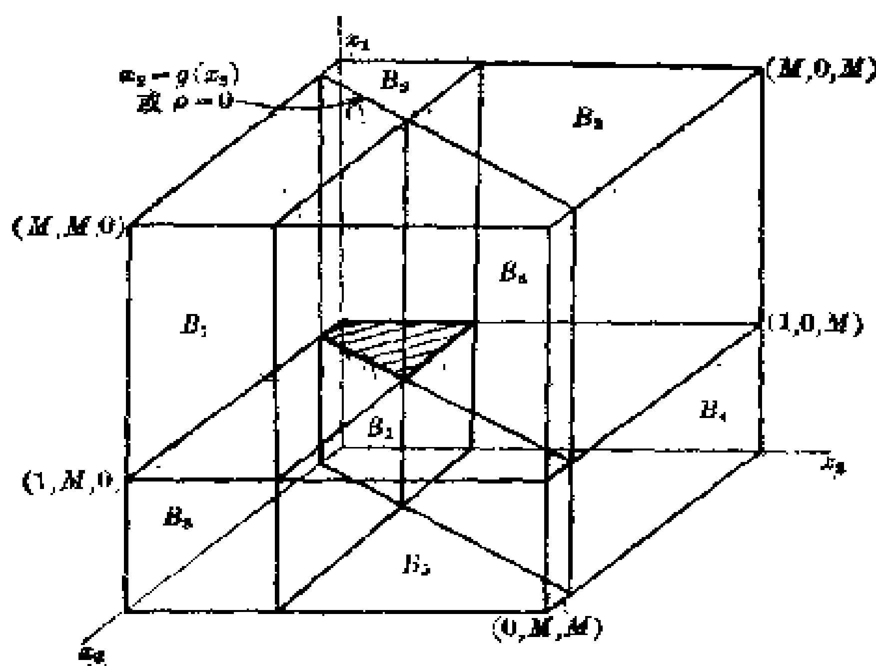


图 22

$$F=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\in\mathbb{R}^3\mid x_1=1,\ 0\leqslant x_3\leqslant1,$$
$$0\leqslant x_2\leqslant(-\gamma_2/\gamma_1^0)(x_3-1)+1\}\setminus\{(1,\ 1,\ 1)\}.$$

引理 2(Troy[43]) 设 $\pi(0)\in F$．则存在一最小的 $\tau=\tau(\pi(0))>0$，使得 $\dot{x}_1(\tau)=0,\ x_2(\tau)>1$ 及 $x_3(\tau)>1$．

证明 定义函数 $g(x_3)=(-\gamma_2/\gamma_1^0)(x_3-1)+1$．若 $x_2(0)<$

$g(x_3(0))$，则 $\rho(0)>0$ 及 $\dot{x}_1(0)>0$. 否则 $x_2(0)=g(x_3(0))$ 及 $\dot{x}_1(0)=0$；但此时(7.44)$\Rightarrow\ddot{x}_1(0)>0$. 因此存在一最大之 $\tau>0$ 使得 $\dot{x}_1(t)>0$, $\forall t\in(0,\ \tau)$. 设 $\tau=\infty$, 则 $\lim\limits_{t\to\infty}x_1(t)=M$ 存在. 或者 $M\in(1,\ \infty)$, 或者 $M=\infty$. 设 $M\in(1,\ \infty)$, 可以证明这蕴含 $\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=\lim\limits_{t\to\infty}x_3(t)=M$.

现来证明这件事. 因 $x(0)\in F$, 由 F 之定义推出 $x_2(0)<1$. 所以 $\dot{x}_2(0)=\gamma_3^0(1-x_2(0))>0$. 如果存在某一 $T>0$（取其最小者）使 $\dot{x}_2(T)=0$, 则 $\ddot{x}_2(T)\leqslant 0$. 可是由(7.44)的第二个方程推出 $\ddot{x}_2(T)=\gamma_3^0(\dot{x}_1(T))>0$, 立得矛盾. 因此 $\dot{x}_2(t)>0$, $\forall t>0$ 而且 $\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)$ 存在. 因 $x_1(t)<M$, $\forall t>0$, (7.44) 之第二方程推出 $x_2(t)<M$, $\forall t>0$. 若 $\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=N<M$, 令 $l\in(N,\ M)$, 则存在 $t_1>0$, 使得 $x_2(t)<l$ 及 $x_1(t)>(l+M)/2$, $\forall t>t_1$. 所以，由(7.44)的第二方程可得，$\dot{x}_2>\gamma_3^0(M-l)/2>0$, $\forall t>t_1$. 这蕴含 $\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=\infty$, 这与 $\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)<M<\infty$ 相矛盾. 因此，$\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=M$. 同理可证 $\lim\limits_{t\to\infty}x_3(t)=M$.

这样一来，$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=(M,\ M,\ M)$, $M>1$. 于是，$(M,\ M,\ M)$ 必是(7.44)的奇点，矛盾. 这就迫使 $M=\infty$. 这时可证

$$\lim_{t\to\infty}x_1(t)=\lim_{t\to\infty}x_2(t)=\lim_{t\to\infty}x_3(t)=\infty. \tag{7.45}$$

同时，若 $\dot{x}_1>0$, $\forall t>0$, 则 $\rho>0$, $\forall t>0$. 即

$$x_3(t)>(-\gamma_1^0/\gamma_2)(x_2(t)-1)+1,\ \forall t>0. \tag{7.46}$$

把 $\rho=\gamma_1^0(1-x_2)+\gamma_2(1-x_3)$ 对 t 求微商，得出

$$\dot{\rho}=-\gamma_1^0\gamma_3^0(x_1-x_2)-\gamma_2\gamma_4^0(x_1-x_3). \tag{7.47}$$

还有，(7.45)$\Rightarrow\exists\, q>0$ 使

$$x_i(t)>2,\ \forall t>q,\ i\in\{1,\ 2,\ 3\}. \tag{7.48}$$

于是，$\gamma_1^0\gamma_3^0/(\gamma_2^0\gamma_4^0)<-1$, (7.46), (7.47)和(7.48)以及 $\gamma_3^0<\gamma_4^0\Rightarrow$ $\dot{\rho}<-\gamma_4^0(\gamma_1^0+\gamma_2)<0$, $\forall t>q$. 因此 $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(t)=-\infty$. 但这意味着

$\dot{x}_1(t)$ 必在某 $t>0$ 处变号，这与 $\dot{x}_1>0$, $\forall t>0$ 这假设相矛盾. 因此得到结论：存在第一个 $\tau>0$ 使 $\dot{x}_1(\tau)=0$. 即是 $x_2(t)<g(x_3(t))$, $\forall t\in(0,\ \tau)$，而 $x_2(\tau)=g(x_3(\tau))$. 所以

$$\frac{d}{dt}(x_2(t)-g(x_3(t)))\big|_{t=\tau}\geqslant 0. \tag{7.49}$$

余下要证的是：$x_3(\tau)>1$, $x_2(\tau)>1$.

利用方程(7.44)，$x_2(\tau)=g(x_3(\tau))$，可得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x_2(t)-g(x_3(t)))\big|_{t=\tau}&=\dot{x}_2-g'(x_3)\dot{x}_3\\
&=\gamma_3^0(x_1-x_2)+\frac{\gamma_1^0\gamma_4^0}{\gamma_2}(x_1-x_3)\\
&=\gamma_3^0\left(x_1+\frac{\gamma_1^0}{\gamma_2}(x_3-1)-1\right)+\frac{\gamma_1^0\gamma_4^0}{\gamma_2}(x_1-x_3)\\
&=\frac{1}{\gamma_2}[x_1(\gamma_2\gamma_3^0+\gamma_1^0\gamma_4^0)+x_3\gamma_1^0(\gamma_3^0-\gamma_4^0)-\gamma_1^0\gamma_3^0-\gamma_3^0\gamma_2^0].
\end{aligned}$$

注意及 $x_1(\tau)>1$, $\gamma_2<0$, $\gamma_3^0<\gamma_4^0$, $\gamma_1^0\gamma_3^0/(\gamma_2^0\gamma_4^0)<-1$；若假设 $x_3(\tau)\leqslant 1$，则有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x_2(t)-g(x_3(t)))\big|_{t=\tau}<\frac{1}{\gamma_2}[&(\gamma_2\gamma_3^0+\gamma_1\gamma_4^0)\\
&+\gamma_1^0(\gamma_3^0-\gamma_4^0)-\gamma_1^0\gamma_3^0-\gamma_3^0\gamma_2]=0.
\end{aligned}$$

这与 (7.49) 相矛盾. 因此，$x_3(\tau)>1$. 从而 $x_2(\tau)=g(x_3(\tau))>1$. ▌

设 $G\subset F$ 为紧致集，设 $\pi(0)\in G$. 则按引理 2 找到的 $\tau=\tau(\pi(0))$是 G 上一致连续函数. 所以，存在 $T=T(G)>0$, $M=M(G)>0$ 使得

$$x_1(\tau(\pi(0)))<M \text{ 及 } \tau(\pi(0))<T,\ \forall\pi(0)\in G.$$

定义立方体 $B=B(G)$, $B=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\in\mathbb{R}^3\,|\,0\leqslant x_1,\ x_2,\ x_3\leqslant M\}$. 把 B 划分为八个子区域：

B_1: $0\leqslant x_1\leqslant 1$, $0\leqslant x_3\leqslant 1$, $0\leqslant x_2\leqslant g(x_3)$,

B_2: $1\leqslant x_1\leqslant M$, $0\leqslant x_3\leqslant 1$, $0\leqslant x_2\leqslant g(x_3)$,

B_3: $1\leqslant x_1\leqslant M$, $1\leqslant x_3\leqslant M$, $0\leqslant x_2\leqslant g(x_3)$,

B_4: $0\leqslant x_1\leqslant 1$, $1\leqslant x_3\leqslant M$, $0\leqslant x_2\leqslant g(x_3)$,

B_5: $0\leqslant x_1\leqslant 1$, $1\leqslant x_3\leqslant M$, $g(x_3)\leqslant x_2\leqslant M$,

B_6: $1\leqslant x_1\leqslant M$, $1\leqslant x_3\leqslant M$, $g(x_3)\leqslant x_2\leqslant M$;

B_7: $1\leqslant x_1\leqslant M$, $0\leqslant x_3\leqslant 1$, $g(x_3)\leqslant x_2\leqslant M$,

B_8: $0\leqslant x_1\leqslant 1$, $0\leqslant x_3\leqslant 1$, $g(x_3)\leqslant x_2\leqslant M$.

设 λ_1 是 A 的负特征根，$\bar{v}=(v_1, v_2, v_3)$是其对应的(非零)特征向量. 令 λ_2, λ_3 为 A 之其余两特征根(具正实部)，则有 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-(\gamma_3^0+\gamma_4^0)<0$. 利用 $A\bar{v}=\lambda_1\bar{v}$, 可推出

$$v_3/v_2>-\gamma_1^0/\gamma_2,$$

并且或者 $v_1>0$, $v_2<0$, $v_3<0$, 或者 $v_1<0$, $v_2>0$, $v_3>0$. 所以系统(7.44)的稳定流形指向 $B_4\cup B_7$ 内部.

其次，设 $\pi(0)\in F$, $\pi(t)\in B_2$, $\forall t>0$. 则有 $\rho(t)>0$, $\forall t>0$ 和 $\dot{x}_1>0$, $\forall t>0$(这蕴含对某 $M>1$, $\lim\limits_{t\to\infty}x_1(t)=M$). 按引理 2 的证法，可推出 $\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=\lim\limits_{t\to\infty}x_3(t)=M$. 但这样一来，$(M, M, M)$为(7.44)的奇点，矛盾.

如假设 $\pi(t)\in$ 某固定的 B_i, $\forall t>0$, $i\in\{1, 5, 6, 8\}$. 同上法可证，对某 $N>0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\pi(t)=(N, N, N)$. 这意味着$(N, N, N)$是(7.44)的奇点，所以 $N=1$. 因此，$\pi(t)\to(1, 1, 1)$ 而且 $\pi(t)\in B_i$, $\forall t>0$, $i\in\{1, 5, 6, 8\}$. 但这是不可能的. 因为系统的稳定流形指向 $B_4\cup B_7$ 之内部. 所以，对某 $i\in\{1, 2, 5, 6, 8\}$, $\pi(t)$在 $t>0$ 时，不能全属于 B_i.

下一步，我们要证明：对某紧致子集 $G\subset F$, 系统的轨道 $\pi(t)$ 按下列次序穿过 B:

$$G\to B_2\to B_3\to B_6\to B_5\to B_8\to B_1\to G\to\cdots. \quad (7.50)$$

设 $G\subset F$ 为紧致集，按上述方法定义 $B=B(G)$. 设 $\pi(0)\in G$ 则由引理 2, 存在 $\tau=\tau(\pi(0))>0$ 使 $\dot{x}_1(\tau)=0$, $x_2(\tau)>1$, $x_3(\tau)$

4. 可完全按引理 2 证明中最末一段的方法, 证明

$$\frac{d}{dt}(x_2(t)-g(x_3(t)))|_{t=\tau}>0.$$

因此, $\pi(t)$ 离开 B_2, 进入 B_3, 并在边界 $x_2=g(x_3)$ 处与 B_3 相交, 穿过此界面进入 B_6. 可由方程(7.44)看出, 除却界面 $x_1=1$ 外, B_6 的边界上的向量场皆指向 B_6 内部. 上面已证 $\pi(t)$不能永远留在 B_6 内, 故 $\pi(t)$ 必穿过边界 $x_1=1$ 进入 B_5. 沿 B_5 的边界 $x_2=g(x_3)$, $\frac{d}{dt}(x_2-g(x_3))>0$. 除却边界 $x_3=1$ 或 $x_1=0$ 外, B_5 边界上的向量场均指向 B_5 内部. 但由引理 1, $x_1>0$, $\forall t>0$. 所以, 由于 $\pi(t)$必须离开 B_5, 它必穿过界面 $x_3=1$ 进入 B_8 内. 同理可证 $\pi(t)$必离开 B_8, 穿过界面 $x_2=g(x_3)$进入 B_1, 最后 $\pi(t)$经过 F 而离开 B_1. 重复这种推理, 可证 $\pi(t)$ 继续按此方式在 B 内从一子区穿到另一子区, 来回振荡.

在证明下面的命题时, 还需用到下列引理:

引理 3(Troy[43]) 设 $G\subset F$ 是一取定的紧致集, $B=B(G)$ 定义如前述. 对(7.40)的每个初值 $\pi(0)\in\{(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3|x_i\geqslant 0, \forall i\}$所对应的解 $\pi(t)$, 存在一最初时刻 $T=T(\pi(0))\geqslant 0$, 使得 $\pi(T)\in B$.

证明 证法与引理 2 的证明以及(7.50)的证明完全相同, 故从略. ∎

命题 7.11 (Troy[43]) 存在紧致集 $D\subset\{(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3|x_i\geqslant 0, \forall i\}$, $(1, 1, 1)\in D$, D 是系统(7.44)的渐近稳定、正向不变集, 而且在 D 内存在(7.44)的周期轨道.

证明 首先证明能选取紧致集 $G\subset F$, 使当 $\pi(0)\in G$, 则 $\pi(t)$按(7.50)的方式在 B 内振动. 对每 $\pi(0)\in F$, 令 $T=T(\pi(0))>0$ 为使 $\pi(T)\in F$ 的第一时刻. 由下式定义的函数 p: $F\to F$

$$p(\pi(0))=\pi(T), \forall\pi(0)\in F$$

是连续的. 以下按 Hastings-Murray[47] 的方法去构造紧致集

$G\subset F$, 同时证明存在光滑的简单曲线 $\Gamma\subset F$, 使得有

(甲) Γ 的两端点分别位在直线

$$x_3=1 \text{ 及 } x_2=(-\gamma_1^0/\gamma_2)(x_3-1)+1$$

上, Γ 的其余部分全属于 F;

(乙) $(1, 1, 1)\notin\Gamma$;

(丙) Γ 把 F 分为两部分, 取远离 $(1, 1, 1)$ 那部分为 G, 而且有 $p: G\to G$.

为了定义 Γ, 考虑系统 (7.44) 在奇点 $(1, 1, 1)$ 处的线性化方程

$$u'=Au, \tag{7.51}$$

其中
$$A=\begin{bmatrix} 0 & -\gamma_1^0 & -\gamma_2 \\ \gamma_3^0 & -\gamma_3^0 & 0 \\ \gamma_4^0 & 0 & -\gamma_4^0 \end{bmatrix},\quad \gamma_2\in(\gamma_2^0-\delta,\ \gamma_2^0).$$

A 有一特征根 $\lambda_1<0$, 其余两个 $\lambda_2=\mu_2+i\sigma$, $\lambda_3=\mu_3-i\sigma$, $\mu_2>0$, $\mu_3>0$. 作满秩线性变换 $u=\Lambda v$, (7.51) 可改写为

$$v'=Nv, \tag{7.52}$$

其中
$$N=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\sigma \\ 0 & \sigma & \mu_3 \end{bmatrix},\quad v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

令 L 代表 $\mathbb{R}^3$ 中过 $(1, 1, 1)$, 平行于特征向量 $\vec{v}$(对应于 λ_1 的)的直线. $\forall\alpha>0$, 考虑曲面 C_α: $v_2^2+v_3^2=\alpha$(在 v 坐标系中); 在 (x_1, x_2, x_3) 坐标系中, 每个 C_α 都是以 L 为轴的椭圆柱面. 沿系统 (7.52) 的解, 有

$$(v_2^2+v_3^2)'=2(\mu_2v_2^2+\mu_3v_3^2)>0 \quad (\text{当 } v_2^2+v_3^2=\alpha).$$

所以, 系统 (7.51) 的解自内而外地穿过 C_α. 如 α 及 $\|x-(1, 1, 1)\|$ 皆充分小时, 非线性系统 (7.44) 的解亦具有此性质.

令 $L_B=L\cap B$ (这是一直线段), $C_\alpha^B=C_\alpha\cap B$. 则 $L_B\subset B_7\cap B_4$, 而曲面 C_α^B 有一部分在 $B_7\cup B_4$, 其余则在 $B_7\cup B_4$ 外. 我们

要证：当 $\alpha\to 0$，C_α^u 上位在 $B_7\cup B_4$ 之外的点集必落在以(1, 1, 1)为中心的一个半径任意小的球内．这结论成立的充分必要条件是：L_B 严格地落在 $B_7\cup B_4$ 内(不在这些区域的边界上)．对方程 $A\bar{v}=\lambda_1\bar{v}$ 作分析，可看出这一点是有保证的．于是，对于充分小的 $\alpha>0$，令 $\Gamma=C_\alpha\cap F$．在平面 $x_1=1$ 上，把由 Γ, $x_3=1$, $x_2=(-\gamma_1^0/\gamma_2)(x_3-1)+1$ 所围的平面区域记为 $\tilde{\Gamma}$．于是定义 $G=\overline{F\setminus\tilde{\Gamma}}$, $\forall\pi(0)\in G$, $\pi(t)\in B(G)$, $t\geqslant 0$，并且不进入 $B_4\cup B_7$．所以 $\pi(t)$不能与 C_α 相交($\forall t>0$)，故有

$$\pi(T)\in G. \tag{7.53}$$

运用 Brouwer 不动点定理于映射 $p: G\to G$，即得(7.44)的周期轨道的存在性．

为了找出命题 7.10 的正向不变集 D，定义

$$F_1=\{(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1=M(G),$$
$$1\leqslant x_3\leqslant M(G),\ 0\leqslant x_2\leqslant g(x_3)\}.$$

(7.44)的向量场除却在 F_1 外，在 $B(G)$ 的其余边界上均指向 $B(G)$ 内部．回顾引理 3 中关于 T 的定义，定义(7.44)的轨道集合 $H=\{\pi(t)\mid\pi(0)\in F_1,\ 0\leqslant t\leqslant T(\pi(0))\}$．注意及 $\pi(T)\in G$，令

$$D=B(G)\cup H.$$

可证(由引理 3, (7.50)，以及证明(7.53)的推理，加上解的唯一性) D 是(7.44)的渐近稳定、正向不变集． ∎

本命题的证明，虽没有直接运用环区原理，但其基本思想是很类似的．

7.4 生物学及化学方面的应用

7.4.1 描写负反馈细胞控制过程的三维动力系统的周期轨道存在性

Tyson[44] 用环区原理证明了一个描写负反馈细胞控制过程

的三维动力系统的周期轨道存在性．这个三维系统是下形：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+z^m}-\alpha x, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-\beta y, \\ \dfrac{dz}{dt}=y-\gamma z. \end{cases} \tag{7.54}$$

此方程首先由 Goodwin[160] 建立．此系统有一个奇点 (x_0, y_0, z_0)，其中 $x_0=\beta y_0=\beta\gamma z_0$，$z_0$ 是 $\alpha\beta\gamma z^{m+1}+\alpha\beta\gamma z-1=0$ 的唯一正实根．(7.48)中之参数 $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $m\in I^+$; $(x, y, z)\in \mathbb{R}^3_+=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 | x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$.

首先注意到 Griffith[161] 已证明系统(7.54)的一切解均有界．具体地说，(7.54)在 $\mathbb{R}^3_+$ 有一个正向不变集 $\mathbb{B}_A$，(7.54)的一切轨道皆进入 $\mathbb{B}_A$．$\mathbb{B}_A=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3_+ | 0\leqslant x\leqslant\beta\gamma A, 0\leqslant y\leqslant\gamma A, 0\leqslant z\leqslant A$，其中 $\alpha\beta\gamma A>1\}$．最后，它们必将进入 $\mathbb{B}=\mathbb{B}_{(\alpha\beta\gamma)^{-1}}$．我们以 $\mathbb{B}$ 为基础，挖去一洞，排除奇点 (x_0, y_0, z_0)，构造一环面(实心)，使满足环区原理的条件．这里所用的技巧，首先是由 Hastings-Murray[47] 提出的．

用平面 $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ 把 $\mathbb{B}$ 分为八个子区域，并编号如次(见图 23)：

$$\mathbb{B}_1=\{(x, y, z)\in\mathbb{B} | x<x_0, y<y_0, z<z_0\},$$
$$\mathbb{B}_2=\{(x, y, z)\in\mathbb{B} | x>x_0, y<y_0, z<z_0\},$$
$$\mathbb{B}_3=\{(x, y, z)\in\mathbb{B} | x>x_0, y>y_0, z<z_0\},$$
$$\mathbb{B}_4=\{(x, y, z)\in\mathbb{B} | x>x_0, y>y_0, z>z_0\},$$
$$\mathbb{B}_5=\{(x, y, z)\in\mathbb{B} | x<x_0, y>y_0, z>z_0\},$$
$$\mathbb{B}_6=\{(x, y, z)\in\mathbb{B} | x<x_0, y<y_0, z>z_0\},$$
$$\mathbb{B}_7=\{(x, y, z)\in\mathbb{B} | x>x_0, y<y_0, z>z_0\},$$
$$\mathbb{B}_8=\{(x, y, z)\in\mathbb{B} | x<x_0, y>y_0, z<z_0\}.$$

$\mathbb{B}_7$ 的三内边界面上的向量场分别指向 $\mathbb{B}_2$, $\mathbb{B}_4$, $\mathbb{B}_6$．$\mathbb{B}_8$ 的三内边

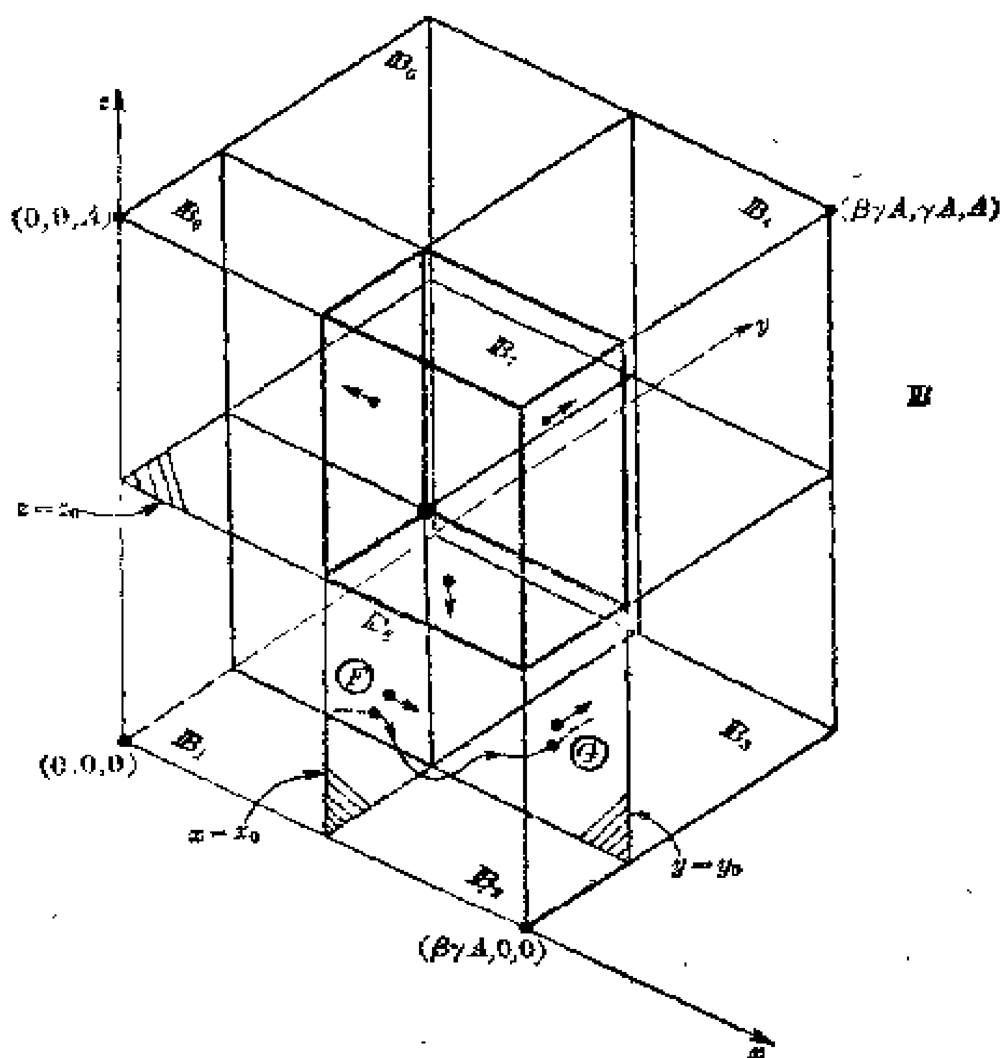


图 23

界面上的向量场分别指向 $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_5$.

现来讨论(7.54)的奇点(x_0, y_0, z_0). 令 $X=x-x_0, Y=y-y_0, Z=z-z_0$, 在(7.54)的奇点$(x_0, y_0, z_0)$邻域把(7.54)线性化, 得

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\alpha & 0 & -f \\ 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & -\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \qquad (7.55)$$

其中 $f=m\alpha\beta\gamma(1-\alpha\beta\gamma z_0)>0$(注意及 $x_0=\beta y_0=\beta\gamma z_0$, $\alpha\beta\gamma z_0^{m+1}+\alpha\beta\gamma z_0-1=0$, 可得 f); 特征方程为

$$L(\lambda)=\lambda^3+(\alpha+\beta+\gamma)\lambda^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)\lambda+\alpha\beta\gamma+f=0.$$

因 α, β, γ, $f>0$, 故没有正的特征根. 假设此方程有一根 $\lambda_1=-\nu<0$, $\lambda_{2,3}=\mu\pm i\sigma(\mu>0,\ \sigma>0)$. 令 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 为对应于 $\lambda_1=-\nu$

的特征向量，则

$$\begin{cases}-\nu\hat{x}=-\alpha\hat{x}-f\hat{z},\\-\nu\hat{y}=\hat{x}-\beta\hat{y},\\-\nu\hat{z}=\hat{y}-\gamma\hat{z}.\end{cases}$$

故
$$\hat{y}=\frac{\hat{x}}{\beta-\nu},\quad \hat{z}=\frac{\alpha-\nu}{-f}.$$

取 $\hat{x}=1$，可得此特征方向的方向余弦

$$a=1/D,\ b=1/D(\beta-\nu),\ c=(\alpha-\nu)/(-Df),$$

其中
$$D=\sqrt{1+\left(\frac{1}{\beta-\nu}\right)^2+\left(\frac{\alpha-\nu}{-f}\right)^2}.$$

注意及 $L(-\alpha)=L(-\beta)=L(-\gamma)=f>0$，故 $|\lambda_1|=\nu>\max(\alpha,\beta,\gamma)$，所以 $a>0$, $b<0$, $c>0$；换言之，过(x_0, y_0, z_0)平行于这特征方向的直线完全落在 $\mathbb{B}_7\cup\mathbb{B}_8$. 于是选取一个以此直线为轴的圆柱面 Σ，当其横截面半径充分小时，在(x_0, y_0, z_0)邻域，在 Σ 上的向量场指向 $\bigcup\limits_{k=1}^{6}\mathbb{B}_k$ 内. 令 S 为 Σ 所围区域与 $\mathbb{B}$ 之交集，于是 $\mathbb{T}=\mathbb{B}\setminus(\mathbb{B}_7\cup\mathbb{B}_8\cup S)$是为所求的正向不变实心环面.

考虑图 23 中记上字母 F 的平面区域(它是 $\mathbb{B}_1$ 与 $\mathbb{B}_2$ 的分界面). 任取 $q\in F$，因 $x=x_0$, $z<z_0$，故 $\left.\frac{dx}{dt}\right|_q>0$，故自 q 出发的轨道 Γ_q 必进入 $\mathbb{B}_2$. 但在 $\mathbb{B}_2$, $x>x_0$, $y<y_0$，故 $\frac{dy}{dt}>0$，故 Γ_q 必走向 G(它是 $\mathbb{B}_2$ 与 $\mathbb{B}_3$ 的分界面)，穿过它进入 $\mathbb{B}_3$. 重复这种推理，可得：Γ_q 必按顺序 $\mathbb{B}_1\to\mathbb{B}_2\to\mathbb{B}_3\to\mathbb{B}_4\to\mathbb{B}_5\to\mathbb{B}_6\to\mathbb{B}_1$ 前进，最后在某有限 $T>0$ 返回 F. 于是利用(7.54)的轨道可定义一个同胚映射 φ: $F\to F$(F 是闭、有界、单连通区且不含奇点)，故由 Brouwer 不动点定理知，必存在 $\hat{q}\in F$ 使 $\varphi(\hat{q})=\hat{q}$，是为(7.54)的周期轨道. 于是我们证明了

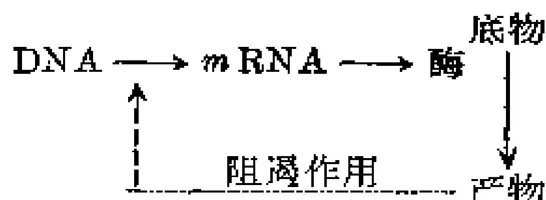
命题 7.12(Tyson[44]) 设系统(7.54)在奇点(x_0, y_0, z_0)处的线性化方程(7.55)满足条件：有一特征根 $\lambda_1<0$，$\lambda_{2,3}=\mu\pm i\sigma$ ($\mu>0$, $\sigma>0$)，则(7.54)存在周期轨道.

至于三维系统(7.54)的周期轨道是否唯一？这个问题，Tyson [44]没有解决．我们将在下面 7.4.4 解答此问题．

7.4.2 描写负反馈细胞控制过程的 $n(\geq 3)$ 维动力系统的周期轨道存在性

Hastings, Tyson 及 Webster[45]推广了[44]的结果，研究了一个负反馈细胞控制系统的 $n(\geq 3)$ 维数学模型的周期轨道存在性问题．

这个生物控制系统是在研究蛋白质合成的遗传调节机制时遇到的：



参见 Jacob 和 Monod[162]．[45]给出此系统的数学模型：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{1+x_n^m} - \alpha_1 x_1, \\ \dot{x}_j = x_{j-1} - \alpha_j x_j, \ 2 \leq j \leq n, \end{cases} \tag{7.56}$$

其中 $m \in I^+$；$\alpha_j > 0,\ j=1, \cdots, n$；$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j \geq 0,\ \forall j\}$．[45]细致地讨论了系统(7.56)的向量场结构，用 Brouwer 不动点定理证明(7.56)存在周期轨道．

[45]考虑了下列更广泛的 n 维动力系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_n, x_1), \\ \dot{x}_j = f_j(x_{j-1}, x_j), \ 2 \leq j \leq n, \end{cases} \tag{7.57}$$

或记为向量形式

$$\dot{x} = f(x);$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$，f：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$f(x) = (f_1(x_n, x_1), f_2(x_1, x_2), \cdots, f_n(x_{n-1}, x_n)) \in C^n(\mathbb{R}_+^n)$，$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j \geq 0,\ \forall j\}$；而且还满足下述诸条件：

$$\partial f_i/\partial x_i < 0,\ \partial f_i/\partial x_{i-1} > 0,\ \forall i \in \{2, 3, \cdots, n\}. \tag{7.58}$$

$$\partial f_1/\partial x_n<0. \tag{7.59}$$

$$f_i(0,\ 0)\geqslant 0,\ \forall i\in\{1,\ \cdots,\ n\}. \tag{7.60}$$

$$f_1(x_n,\ 0)>0,\ \forall x_n\geqslant 0. \tag{7.61}$$

此外，还要求系统(7.57)在 $\mathbb{R}_+^n$ 内有唯一奇点 $x^*=(x_1^*,\ \cdots,\ x_n^*)$，满足

$$f_1(x_n,\ x_1)\begin{cases}<0,\ x_n>x_n^*,\ x_1>x_1^*;\\ >0,\ x_n<x_n^*,\ x_1<x_1^*.\end{cases} \tag{7.62}$$

$$\partial f_1/\partial x_1 \text{ 在 } \mathbb{R}_+^n \text{ 有上界.}$$

这个 n 维动力系统模型概括了系统(7.56)及下列系统：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=[1/(1+x_n^\varrho)]-[\alpha_1x_1/(\beta_1+x_1)],\\ \dot{x}_j=[\alpha_{j-1}x_j/(\beta_{j-1}+x_j)]-[\alpha_jx_j/(\beta_j+x_j)],\ 2\leqslant j\leqslant n.\end{cases} \tag{7.63}$$

(参见 Morales 和 McKay[163])

$$\begin{cases}dG/dt=(\log 2)(1-bI^m)G-k_2G,\ 1-bI^m\geqslant 0,\\ dD/dt=k_2G-k_3D,\\ dI/dt=k_4D-k_5I.\end{cases} \tag{7.64}$$

(参见 Weiss 和 Kavanau[164])

命题 7.13 (Hastings-Tyson-Webster [45]) 设 f 在 x^* 的 Jacobi 阵 $E=f_x(x^*)$ 没有重特征根，至少有一个 $\mathrm{Re}(\lambda)>0$ 的特征根，则满足条件(7.58)～(7.62)的系统(7.57)在 $\mathbb{R}_+^n$ 内有周期轨道.

现把此命题的证明思路勾画如下：

作坐标变换 $y=x-x^*$，由(7.57)得

$$\dot{y}=g(y), \tag{7.65}$$

其中 $g(y)=f(y+x^*)$. 以下一律记 $y_{i-1}=y_n$(当 $i=1$). 我们有

$$g_i(0,\ 0)=0,\ \partial g_i/\partial y_{i-1}>0,\ i\in\{2,\ \cdots,\ n\};\ \partial g_1/\partial y_n<0(\text{在 } Q),$$

$$Q=\{(y_1,\ \cdots,\ y_n)\in\mathbb{R}^n\mid y_i>-x_i^*,\ \forall i\}.$$

$$\partial g_i/\partial y_i<0,\quad \forall y\in Q,\ i\in\{2,\ \cdots,\ n\},$$

$$g_i(-x_{i-1}^*,\ -x_i^*)\geqslant 0,\ g_1(y_n,\ -x_1^*)>0,\ \forall y_n\geqslant -x_n^*,$$

$$g_1(y_n,\ y_1)<0\quad(\text{当 } y_1>0 \text{ 及 } y_n>0),$$

$$g_1(y_n,\ y_1)>0\quad(\text{当 } y_1<0 \text{ 及 } y_n<0),$$

$$\partial g_1/\partial y_1 \text{ 在 } \overline{Q} \text{ 有上界.}$$

证明依靠 Brouwer 不动点定理. 在 $\overline{Q}$ 内构造一$(n-1)$维胞腔 $\overline{G}\subset\overline{Q}$, $(0,\ \cdots,\ 0)\notin\overline{G}$, (7.65)的动力流定义了一个连续映射 φ: $\overline{G}\to\overline{G}$, 然后运用 Brouwer 不动点定理. 证明大致分三大部分:

(Ⅰ) 构造一正向不变集 $\overline{X}\subset\overline{Q}$, $\overline{X}$ 内轨道当 $t\to\infty$ 或者在 $\overline{X}$ 内振动, 或者趋于奇点 O. 方法是推广[44]的技巧.

(Ⅱ) 证明三件事:

(甲) X 内的轨道不趋于奇点 O;

(乙) 系统(7.65)在奇点 O 之稳定流形 $\mathscr{S}$ 在 O 处不与 $\overline{X}$ 相切;

(丙) 存在小(实心)柱体 C_ε, 使得当 $\|y(0)\|$ 充分小, 以及 $y(0)\in\partial C_\varepsilon\cap\overline{X}$ 时, 有 $y(t)\notin C_\varepsilon$, $\forall t>0$.

(Ⅲ) 适当选取 $\overline{G}\subset\overline{X}\backslash C_\varepsilon$, 证明 $\overline{G}$ 为$(n-1)$维胞腔, 而且由(7.65)的动力流所定义的 φ: $\overline{G}\to\overline{G}$ 有不动点.

现来分别陈述各主要步骤的梗概.

关于(Ⅰ):

$\partial g_i/\partial y_i<0$ (在 Q), $\forall i\in\{2,\ \cdots,\ n\}\Rightarrow$ 每个方程 $0=g_i(y_{i-1},\ y_i)$, $i\in\{2,\ \cdots,\ n\}$在 O 的邻域可解出 y_i (为 y_{i-1} 的函数): $g_i(y_{i-1},\ \eta_i(y_{i-1}))=0$, 而且连同 $\partial g_i/\partial y_{i-1}>0$, $i\in\{2,\ \cdots,\ n\}\Rightarrow\eta_i'(y_{i-1})>0$. 另外, $g_i(-x_{i-1}^*,\ -x_i^*)\geqslant 0$, $\forall y_n\geqslant -x_n^*\Rightarrow$ 每个 η_i 可扩大其定义域到 $-x_{i-1}^*\leqslant y_{i-1}\leqslant 0$, 而且有 $-x_i^*\leqslant\eta_i(-x_{i-1}^*)<0$.

定义 n 个实数 γ_i 如次:

$$\gamma_1=-x_1^*,$$

$$\gamma_i=\eta_i(\gamma_{i-1}),\ i\in\{2,\ \cdots,\ n\},$$

我们有

引理 1 (Hastings-Tyson-Webster[45]) 集合 $\bar{S}=\{(y_1, \cdots, y_n)\in\mathbb{R}^n \mid y_i\geqslant\gamma_i, \forall i\}$ 是系统(7.65)的正向不变集.

现把 $\bar{S}$ 分为 2^n 个子集 $\bar{S}_0, \cdots, \bar{S}_{2^n-1}$ 如下:

若 $j\in\{0, 1, \cdots, 2^n-1\}$, 其二进制表示为 $a_1(j)\cdots a_n(j)$, 则令

$$\bar{S}_j=\{y\in\bar{S}\mid(-1)^{a_i(j)}y_i\leqslant 0, 1\leqslant i\leqslant n\}.$$

例如, $n=5$, $j=13=01101$, 则 $\bar{S}_j$ 由不等式 $\gamma_i\leqslant y_i\leqslant 0$, $i=1, 4$; $y_i\geqslant 0$, $i=2, 3, 5$ 定义. 用 S_j 表 $\bar{S}_j$ 之内部.

随着证明四条引理(引理 2～引理 5)[45], 其目的在于找出 $\bar{S}$ 的一个不变子集(包含若干 $\bar{S}_j$, 但不是全部 $\bar{S}_j$), 它与系统(7.65)在奇点 O 处的稳定流形不相切. 具体讲, 定义 $\bar{V}\subset\bar{S}$ 为

$$\bar{V}=\bar{S}_{00\cdots0}\cup\bar{S}_{100\cdots0}\cup\bar{S}_{110\cdots0}\cup\cdots\cup\bar{S}_{111\cdots1}\cup\bar{S}_{011\cdots1}\cup\cdots\cup\bar{S}_{00\cdots01}.$$

即 $\bar{V}$ 是由那些满足下述性质的 $y=(y_1, \cdots, y_n)\in\bar{S}$ 所组成: 在序列 $y_1, \cdots, y_n$ 中最多有一次符号改变. 又令 $\bar{W}$ 为包含过 $\bar{V}$ 的一切射线的最小集, 即 $\zeta\in\bar{W}\Leftrightarrow$ 对某 $\alpha>0$, $\alpha\zeta\in\bar{V}$.

随着又证明引理 6[45]. 以引理 2～引理 6 为依据, 可得两结论:

(甲) V 是系统(7.65)的正向不变集;

(乙) $y(0)\in\bar{V}\Rightarrow y(t)\in V$, $\forall t>0$; 而且 $y(t)$ 在 V 中的状态有两可能:

(i) y 按定义 $\bar{V}$ 中所列的 $\bar{S}_j$ 的次序反复经过这些 $S_j\subset V$;

或

(ii) 当 t 充分大时, $y(t)$ 永远停在某 S_k 之内.

引理 7～引理 9[45] 这三条引理是专门讨论上述 (ii) 的轨道的, 结论是这种轨道有性质: $y(t)\to 0(t\to\infty)$.

定义

$$\overline{X}=\{y\in\overline{V}\,|\,g(y)\in\overline{W}\}.$$

则由上述知，$\overline{X}$ 是系统(7.65)的正向不变集．而且 $y(0)\in\overline{X}$，$y(0)\neq 0$，则 $y(t)$ 属于上述(i)或(ii)，而在(ii)的情形，有 $y(t)\to 0(t\to\infty)$．(在第(II)部分，将证明 X 内的轨道是不会趋于奇点 O 的，因此其内的轨道只会按(i)行动．)

关于(II)：

所谓系统(7.65)在奇点 O 处的稳定流形 $\mathscr{S}$，是指所有满足 $y(t)\to 0$ (当 $t\to\infty$) 的轨道 $\Gamma^+(y(0))=\{y(t)\,|\,0\leqslant t<\infty\}$ 的并集．$\mathscr{S}$ 与 $\overline{X}$ 不相切的意思是：若 $y(0)\in\mathscr{S}$，$y(0)\neq 0$，则 $\overline{\Gamma^+(y(0))}$ 在 O 与 $\overline{X}$ 不相切．至于实心圆柱体 $\overline{C}_\varepsilon$，则要求它不但在"半径"上，而且在"长度"上都很小，使 $\overline{C}_\varepsilon$ 全属于 O 的某微小邻域之内，而且 $O\in\overline{C}_\varepsilon$．

引理 12[45]解决(甲)，即 X 内的轨道不趋于奇点 O．

注意及 $E=g_y(0)$ 呈下形

$$E=\begin{bmatrix}-e_1 & 0 & 0 & \cdots & -\Phi\\ d_2 & -e_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_3 & -e_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & d_n & -e_n\end{bmatrix},$$

其中 $\Phi>0$，$d_i>0$，$e_i>0$(当 $i\geqslant 2$)，而且 $e_1=(\partial g_1/\partial y_1)(0,\ 0)\geqslant 0$．$E$ 的特征方程为

$$s(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda+e_i)+\varphi=0,$$

其中 $\varphi=\left(\prod_{i=1}^{n}d_i\right)\Phi$．若 $\lambda\in\mathbb{R}^1$，$\lambda\geqslant 0$，则 $s(\lambda)>0$，故 $s(\lambda)$ 的具正实部的根必成对出现：λ，$\bar{\lambda}$．设 μ_1，$\cdots$，μ_n 是 E 的特征根，按 $\mathrm{Re}(\mu_i)$ 由小到大排列，而且当 $\mu_i=\bar{\mu}_{i+1}$ 时，$\mathrm{Im}(\mu_i)>0$．可以证明，没有两个以上的 μ_i 有相同的实部．令 w^i 为对应于 μ_i 的特征向量．设 μ_1，$\cdots$，μ_m 是 E 的具非正实部的特征根，则由命题 7.12 的假设，

$m\leqslant n-2$. 设 $v^1, \cdots, v^m$ 是一组线性无关实向量, v^i 是某 $w^i(i\leqslant m)$的实部或虚部. 把 $v^1, \cdots, v^m$ 扩充成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $v^1, \cdots, v^n$, 并对 $y\in\mathbb{R}^n$ 定义 $\alpha_i(y)$ 如下:

$$y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(y)v^i.$$

又令 $\|y\|^2=\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i(y)]^2$, $\|y\|_m^2=\sum_{i=m+1}^{n}[\alpha_i(y)]^2$. 于是有下述

引理 13(Hastings-Tyson-Webster[45]) 存在 $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, 使当 $y\in\overline{X}$, $0<\|y\|<\delta_1$, 则有

$$\|y\|_m^2/\|y\|^2\geqslant\delta_2.$$

引理 15(Hastings-Tyson-Webster[45]) 存在 $\delta_3>0$, 使当 $\epsilon>0$ 充分小, 并取 $C_\epsilon=\{y\in\mathbb{R}^n\,|\,\|y\|^2<\delta_3,\ \|y\|_m^2<\epsilon\}$ 时,

$$H=\{y\in\overline{X}\,|\,y\notin C_\epsilon\}$$

是系统(7.65)的正向不变集.

关于(III):

选取 $\overline{H}$ 的"截面" G 为

$$\overline{G}=\{y\in H\,|\,y_1=0,\ r_i\leqslant y_i\leqslant 0,\ 2\leqslant i\leqslant n\}.$$

可以证明, 利用系统(7.65)的轨道, 能定义一连续映射 $p: \overline{G}\to\overline{G}$. 即: 若 $y(0)=y_0\in\overline{G}$, 令 $T(y_0)=\inf\{t>0\,|\,y(t)\in G\}$, 定义 $p(y_0)=y(T(y_0))$, 则 $p(y_0)\in G$. (见[45]的引理 17.)

[45]随着证明了引理 18～引理 29[45], 最终得到结论: 当 ϵ 充分小时 $\overline{G}$ 是一$(n-1)$维胞腔. 于是可运用 Brouwer 不动点定理. 至此, 命题 7.13 的证明大意陈述完毕. ∎

系统(7.56)的周期轨道是否唯一? [45]没讨论. 这问题将在 7.4.4 中讨论.

7.4.3 一个描写神经网络的三维动力系统周期轨道存在性

U. an der Heiden[46]采用[44]的方法, 证明了下列三维动力系统存在周期轨道:

$$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{a}{1+\exp\{-f-b(q-p)z\}}-ax,\\ \dot{y}=x-py,\\ \dot{z}=y-qz,\end{cases}\tag{7.66}$$

其中常数 $a>0$, $0<p<q$; f, $b\in\mathbb{R}^1$; 另外初值条件满足：$0\leqslant x_0=x(0)\leqslant 1$, $y_0=y(0)=0$, $z_0=z(0)=0$. 此方程源自 Stein-Leung-Mangeron Oğuztöreli[108]，是用来研究神经网络的，Heiden 把它改写为上述形式. 此系统与 Tyson[44] 研究过的负反馈细胞控制系统的模型(3.32)很相似，所不同的是非线性项互异.

引理 1(U. an der Heiden[46]) 设 $Q=\left\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{p},\ 0\leqslant z\leqslant\dfrac{1}{pq}\right\}$, $v(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$ 是系统(7.66)满足初值 $v(t_0)\in Q$ 的解，则 $v(t)\in Q$, $\forall t\geqslant t_0$.

证明 由(7.66)第一个方程看出，若 $x(t)=0$, 则 $\dot{x}(t)>0$; 若 $x(t)=1$, 则 $\dot{x}(t)<0$. 故 $x(t)$ 不能离开区间 $[0,\ 1]$. 设 $y(t)>1/p$, 则 $\dot{y}(t)<x(t)-1\leqslant 0$. 另方面 $y(t)<0\Rightarrow\dot{y}(t)>-py(t)>0$. 故 $0\leqslant y(t)\leqslant 1/p$. 同理可证 $0\leqslant z(t)\leqslant 1/pq$. ∎

命题 7.14(U. an der Heiden [46]) 设 f 为常数，而且

$$b<-\frac{(p+q)(pq+a(a+p+q))}{(q-p)ax^*(1-x^*)},\tag{7.67}$$

其中 x^* 是 $x^*=\dfrac{1}{1+\exp\{-f-bx^*(q-p)/pq\}}$ 的唯一正根，则系统(7.66)至少有一周期轨道.

证明 若 $b<4pq/(q-p)$, 则系统(7.66)有唯一奇点 $v^*=(x^*,\ y^*,\ z^*)$, 其中 $x^*\in(0,\ 1)$, $y^*=x^*/p$, $z^*=x^*/pq$, $v^*\in Q$. 研究系统(7.66)在平面 $x=x^*$, $y=y^*$, $z=z^*$ 上的向量场可推知引理 1 对一个更小的集合 Q^* 成立：

$$Q^*=Q\backslash\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^*<x\leqslant 1,\ 0\leqslant y<y^*,\ z^*<z\leqslant 1/pq\}.$$

系统(7.66)在奇点 v^* 处的 Jacobi 阵为

$$\begin{bmatrix} -a & 0 & bax^*(1-x^*)(q-p) \\ 1 & -p & 0 \\ 0 & 1 & -q \end{bmatrix},$$

其特征方程是

$$P(\lambda)=\lambda^3+(a+p+q)\lambda^2+(ap+aq+pq)\lambda+apq$$
$$-bax^*(1-x^*)(q-p)=0.$$

若 $b<0$，则 $P(\lambda)=0$ 无正根．按 Hurwitz 稳定性准则(例如参见 Williams [166])，若条件(7.67)成立，则 $P(\lambda)=0$ 有一个负根 $\lambda_1<0$，一对共轭复根 $\lambda_{2,3}=\mu\pm i\sigma(\mu>0,\ \sigma>0)$．对应于 λ_1 的特征方向为(X, Y, Z)，其中

$$X=1,\quad Y=1/(p+\lambda_1),$$
$$Z=(a+\lambda_1)/bax^*(1-x^*)(q-p).$$

由于 $P(-p)=P(-a)>0$，故 $\lambda_1<-p$，$\lambda_1<-a$．因此，

$$X>0,\quad Y<0,\quad Z>0.$$

过 v^* 平行于(X, Y, Z)的直线与 Q^* 仅交于一点 v^*．取一个以此直线为轴的实心圆柱体，记其内部为 S．若此柱体之半径充分小，则由于 v^* 的不稳定性，系统(7.66)在 $S\cap Q$ 的边界上的向量场指向 $Q^{**}=Q^*\backslash S$．Q^{**} 是不含奇点的实心环面，它是(7.66)的正向不变集．为了运用 Brouwer 不动点定理，取

$$F_1=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3|x=x^*,\ y\leqslant y^*,\ z\leqslant z^*\}\cap Q^{**},$$

及 $$F_2=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3|x=x^*,\ y^*\leqslant y,\ z^*\leqslant z\}\cap Q^{**}.$$

任取 $v(0)\in F_1$，$v(t)$ 将经过区域 $\{(x,\ y,\ z)\in Q^{**}|x>x^*\}$ 并在有限时间后到达 F_2，然后经区域 $\{(x,\ y,\ z)\in Q^{**}|x<x^*\}$ 在有限时间后返回 F_1．于是(7.66)的轨道定义了一个同胚映射 $\varphi: F_1\to F_1$．由 Brouwer 不动点定理可得，此映射至少有一不动点 $v_0\in F_1$，从而对应于初值条件 $v(t_0)=v_0$ 的解 $v(t)$ 是周期解． ∎

至于系统(7.66)的周期轨道是否唯一，这个问题 Heiden[46] 没有解决，这将在 7.4.4. 中讨论．

7.4.4 一类生物控制系统的周期轨道的唯一性

李炳熙[105]讨论了 n 维动力系统(7.56)，即

$$\begin{cases}\dot{x}_1=1/(1+x_n^m)-\alpha_1x_1,\\ \dot{x}_j=x_{j-1}-\alpha_jx_j,\ 2\leqslant j\leqslant n,\end{cases}$$

的周期轨道的唯一性. 此系统是描述负反馈细胞控制过程(在研究蛋白质合成的遗传调节机制时出现)的数学模型. Hastings, Tyson 及 Webster [45] 证明了系统(7.56)在有界闭区域 $T=\overline{X}\setminus C_\varepsilon$ 内存在周期轨道(见 7.4.2).

系统(7.56)的奇点由下列方程组决定:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x_n^m)}-\alpha_1x_1=0,\\ x_{j-1}-\alpha_jx_j=0,\ j=2,\ \cdots,\ n.\end{cases}\tag{7.68}$$

由(7.68)求出

$$x_1=\alpha_2x_2=\alpha_2\alpha_3x_3=\cdots=\left(\prod_{j=2}^{n}\alpha_j\right)x_n,\tag{7.69}$$

$$\left(\prod_{j=1}^{n}\alpha_j\right)x_n^{m+1}+\left(\prod_{j=1}^{n}\alpha_j\right)x_n-1=0.\tag{7.70}$$

由 Descartes 符号法则, (7.70)存在唯一正实根 $x_n^*>0$, 所以系统(7.56)在 $\mathrm{Int}\,(\mathbb{R}_+^n)$ 有唯一奇点 $(x_1^*,\ x_2^*,\ \cdots,\ x_n^*)$, 其中

$$x_1^*=\alpha_2x_2^*=\alpha_2\alpha_3x_3^*=\cdots=\left(\prod_{j=2}^{n}\alpha_j\right)x_n^*,$$

$$\left(\prod_{j=1}^{n}\alpha_j\right)(x_n^*)^{m+1}+\left(\prod_{j=1}^{n}\alpha_j\right)x_n^*-1=0.$$

引入线性变换

$$y_j=x_j-x_j^*,\quad i=1,\ \cdots,\ n,\tag{7.71}$$

把系统(7.56)变为

$$\begin{cases}\dot{y}_1=[1+(y_n+x_n^*)^m]^{-1}-\alpha_1y_1-\left(\prod_{j=1}^{n}\alpha_j\right)x_n^*,\\ \dot{y}_j=y_{j-1}-\alpha_jy_j,\ j=2,\ \cdots,\ n.\end{cases}\tag{7.72}$$

其中 $(y_1,\ \cdots,\ y_n)\in\overline{Q}=\{(y_1,\ \cdots,\ y_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,y_j\geqslant-x_j^*,\ \forall j\}$.

引理 1(Hasting–Tyson–Webster [45]) 设系统(7.72)在奇点(0, ⋯, 0)的 Jacobi 阵

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ 1 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_n \end{bmatrix}$$

(其中 $\beta=-m(x_n^*)^{m-1}[1+(x_n^*)^m]^{-2}<0$)没有重特征根，而且至少有一个特征根 λ 满足 $\mathrm{Re}(\lambda)>0$，则存在有界闭区域 $T\subset\bar{Q}$，$(0,\cdots,0)\notin T$，T 是(7.72)的正向不变集，T 内存在(7.72)的周期轨道.

证明见[45]，这里的 T 即[45]中的 $\bar{X}\backslash C_\varepsilon$，事实上该文证明了一个比引理 1 更广泛的命题(见 7.4.2)。

引理 2　系统(7.72)与下列 n 阶方程等价：

$$(D+\alpha_1)(D+\alpha_2)\cdots(D+\alpha_n)y+\left(\prod_{j=1}^{n}\alpha_j\right)x_n^*$$
$$-[1+(y+x_n^*)^m]^{-1}=0, \tag{7.73}$$

其中 $D\equiv d/dt$，$y=y_n$；如采用 α_1，$\cdots$，α_n 的初等对称函数

$$S_1=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j,$$
$$S_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_1\alpha_n+\cdots=\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j,$$
$$\vdots$$
$$S_n=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=\prod_{j=1}^{n}\alpha_j,$$

则(7.73)可写成

$$(D^n+S_1D^{n-1}+S_2D^{n-2}+\cdots+S_{n-1}D+S_n)y+S_nx_n^*$$
$$-[1+(y+x_n^*)^m]^{-1}=0. \tag{7.74}$$

证明　从系统(7.72)的第 n 个方程出发，依次向上一方程代入，最后令 $y_n=y$，即得(7.73)；反之，令 $y=y_n$，$y_{j-1}=\dot{y}_j+\alpha_jy_j$，$j=2$，$\cdots$，$n$，从(7.73)可得(7.72)．　∎

引理 3　设 $\alpha_i\neq\alpha_k$，$i\neq k$，则方程(7.73)对应于初始条件

$$y(0),\ y^{(1)}(0),\ \cdots,\ y^{(n-1)}(0)$$

的解 $y(t)$ 满足下面的 Volterra 积分方程：

$$y(t)+x_n^*=f(t)+\int_0^t A(t-\tau)\frac{1}{1+[y(\tau)+x_n^*]^m}d\tau,\quad t\geqslant 0,\tag{7.75}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
f(t)&=\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}a_k(-\alpha_j)^{n-k-1}-S_nx_n^*\right\}e^{-\alpha_jt}[P_j(-\alpha_j)]^{-1},\\
A(s)&=\sum_{j=1}^{n}e^{-\alpha_js}[P_j(-\alpha_j)]^{-1},\ P_j(p)=(p+\alpha_j)^{-1}\prod_{l=1}^{n}(p+\alpha_l),\\
P_j(-\alpha_j)&=(\alpha_1-\alpha_j)(\alpha_2-\alpha_j)\cdots(\alpha_{j-1}-\alpha_j)(\alpha_{j+1}-\alpha_j)\cdots(\alpha_n-\alpha_j).
\end{aligned}\right\}\tag{7.76}$$

而 a_k, $k=0,\cdots,n-1$, 是 $y(0),y^{(1)}(0),\cdots,y^{(n-1)}(0)$ 的线性组合

$$\left\{\begin{aligned}
a_0&=y(0),\\
a_1&=y^{(1)}(0)+S_1y(0),\\
a_2&=y^{(2)}(0)+S_1y^{(1)}(0)+S_2y(0),\\
&\vdots\\
a_k&=y^{(k)}(0)+S_1y^{(k-1)}(0)+S_2y^{(k-2)}(0)+\cdots+S_ky(0),\\
&\vdots\\
a_{n-1}&=y^{(n-1)}(0)+S_1y^{(n-2)}(0)+S_2y^{(n-3)}(0)+\cdots+S_{n-1}y(0).
\end{aligned}\right.\tag{7.77}$$

证明 对方程(7.74)取 Laplace 变换 $\mathscr{L}$, 得到

$$\left\{\prod_{j=1}^{n}(p+\alpha_j)\right\}Y(p)=H(p)-S_nx_n^*\frac{1}{p}+\mathscr{L}\{[1+(y(t)+x_n^*)^m]^{-1}\},$$

其中 $Y(p)=\mathscr{L}\{y(t)\}$, $H(p)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kp^{n-k-1}$.

由此求得

$$Y(p)=H(p)\left\{\prod_{j=1}^{n}(p+\alpha_j)\right\}^{-1}-S_nx_n^*\left\{p\prod_{j=1}^{n}(p+\alpha_j)\right\}^{-1}+\left\{\prod_{j=1}^{n}(p+\alpha_j)\right\}^{-1}\mathscr{L}\{[1+(y(t)+x_n^*)^m]^{-1}\}.$$

对上式取 Laplace 逆变换 $\mathscr{L}^{-1}$, 按 Oberhettinger 与 Larry Badii[167] 的公式, 即得(7.75), (7.76), (7.77). ∎

引理 4　公式(7.76)中的映射 $f: \mathbb{R}_+^1 \to \mathbb{R}^1$ 是有界的、一致连续的，而且下列关系式成立：

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma(t) &= f(t) + \int_0^t A(t-\tau)\frac{1}{1+\sigma(\tau)^m}\,d\tau, \\
\sigma^{(1)}(t) &= f^{(1)}(t) + \int_0^t A^{(1)}(t-\tau)\frac{1}{1+\sigma(\tau)^m}\,d\tau \\
&\quad + \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{P_j(-\alpha_j)}\right)\frac{1}{1+\sigma(t)^m}, \\
\sigma^{(k)}(t) &= f^{(k)}(t) + \int_0^t A^{(k)}(t-\tau)\frac{1}{1+\sigma(\tau)^m}\,d\tau \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-\alpha_j)^l}{P_j(-\alpha_j)}\left(\frac{1}{1+\sigma(t)^m}\right)^{(k-l)}, \\
&\quad (k=2,\ \cdots,\ n-1).
\end{aligned}
\right\}
\tag{7.78}
$$

证明　$f: \mathbb{R}_+^1 \to \mathbb{R}^1$ 是连续的，而且 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=0$，所以 $f: \mathbb{R}_+^1 \to \mathbb{R}^1$ 是一致连续的，f 的有界性从其表达式可看出。公式(7.78)可直接从(7.75)推出，只要令 $y(t)+x_n^*=\sigma(t)$。　∎

结合上述(7.72)和(7.78)，可写出 $y_j(t)$，$j=1, \cdots, n$ 与 $\sigma(t)$ 的关系：

$$
\begin{aligned}
y_n(t) &= \sigma(t) - x_n^*, \\
y_{n-1}(t) &= \dot{y}_n(t) + \alpha_n y_n(t), \\
&\ \vdots \\
y_1(t) &= \dot{y}_2(t) + \alpha_2 y_2(t).
\end{aligned}
$$

或详细写出，

$$
\left.
\begin{aligned}
y_n(t) &= \sigma(t) - x_n^*, \\
y_{n-1}(t) &= \sigma^{(1)}(t) + \alpha_n\sigma(t) - \alpha_n x_n^*, \\
y_{n-2}(t) &= \sigma^{(2)}(t) + (\alpha_{n-1}+\alpha_n)\sigma(t) + \alpha_{n-1}\alpha_n\sigma(t) - \alpha_{n-1}\alpha_n x_n^*, \\
&\ \vdots \\
y_1(t) &= \sigma^{(n-1)}(t) + (S_1-\alpha_1)\sigma^{(n-2)}(t) \\
&\quad + (S_2-\alpha_1(S_1-\alpha_1))\sigma^{(n-3)}(t) \\
&\quad + (S_3-\alpha_1(S_2-\alpha_1(S_1-\alpha_1)))\sigma^{(n-4)}(t) + \cdots + S_n\sigma(t) \\
&\quad - S_n x_n^*,
\end{aligned}
\right\}
\tag{7.79}
$$

这里 $\sigma(t)$ 满足(7.78)。

容易证明下列

引理 5 函数 $1/(1+\sigma^m)$, $\sigma\in\mathbb{R}_+^1$, 满足下列条件:

$$|1/(1+\sigma_1^m)-1/(1+\sigma_2^m)|\leqslant L|\sigma_1-\sigma_2|,\ \forall\sigma_1,\ \sigma_2\in\mathbb{R}_+^1,$$

其中
$$L=\begin{cases}1,\ m=1,\\ \sup\limits_{\sigma\in\mathbb{R}_+^1}\left[\dfrac{m\sigma^{m-1}}{(1+\sigma^m)^2}\right]=\left(\dfrac{m^2-1}{4m}\right)\sqrt[m]{\dfrac{m+1}{m-1}},\ m>1.\end{cases}$$

以下需引用 Miller[107]的一个定理, 现陈述如下(亦可参考 MacCamy 和 Smith[168])。

考虑 Hilbert 空间 H 上的非线性 Volterra 积分方程

$$u(t)=-\int_0^t F(t-\tau)g(u(\tau))d\tau+h(t),\ t>0, \tag{E}$$

其中 $F(t)$ 是空间 H 上一族有界、线性、自伴算子, g 是有界非线性映射 $g: H\to H$. 如果 $\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=h_0$, 则称

$$u_0(t)=-\int_0^\infty F(\tau)g(u_0(t-\tau))d\tau+h_0,\ t>0 \tag{E$_0$}$$

为方程(E)的极限方程。

定理(Miller) 设 $H=\mathbb{R}^n$, $F\in L_1(0,\infty)$; h: $\mathbb{R}_+^1\to\mathbb{R}^n$ 是有界、一致连续的, g 是连续的, 且方程(E)具有有界解 u: $\mathbb{R}_+^1\to\mathbb{R}^n$. 则存在($E_0$)的解 u_0 及实数序列 $\{t_N\}$, $\lim\limits_{N\to\infty}t_N=\infty$, 使得下关系成立:

$$\lim_{N\to\infty}u(t+t_N)=u_0(t).$$

现来证明关于系统(7.72)的周期轨道唯一性的结果:

命题 7.15(李炳熙[105]) 设系统(7.72)满足引理 1, 3 的条件, 而且

$$L\sum_{j=1}^n\frac{1}{\alpha_j|P_j(-\alpha_j)|}<1, \tag{*}$$

这里 L 是引理 5 中的 Lipschitz 常数, 则在有界闭区域 T 内, (7.72)存在唯一周期轨道 $\Gamma(r_0)$, 其方程可表示为 $(w_1(t),\ w_2(t),\ \cdots,\ w_n(t))$, $t\in\mathbb{R}_+^1$, 其中

$$
\begin{aligned}
w_n(t) &= \sigma_0(t) - x_n^*, \\
w_{n-1}(t) &= \sigma_0^{(1)}(t) + \alpha_n \sigma_0(t) - \alpha_n x_n^*, \\
w_{n-2}(t) &= \sigma_0^{(2)}(t) + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)\sigma_0^{(1)}(t) + \alpha_{n-1}\alpha_n \sigma_0(t) \\
&\quad + \alpha_{n-1}\alpha_n x_n^*, \\
&\vdots \\
w_1(t) &= \sigma_0^{(n-1)}(t) + (S_1 - \alpha_1)\sigma_0^{(n-2)}(t) + (S_2 \\
&\quad - \alpha_1(S_1 - \alpha_1))\sigma_0^{(n-3)}(t) + (S_3 - \alpha_1(S_2 \\
&\quad - \alpha_1(S_1 - \alpha_1)))\sigma_0^{(n-4)}(t) + \cdots + S_n \sigma_0(t) - S_n x_n^*,
\end{aligned}
$$

而 $\sigma_0(t)$, $t \in \mathbb{R}_+^1$, 是积分方程

$$
\sigma_0(t) = \int_0^{+\infty} A(\tau) \frac{1}{1 + \sigma_0(t-\tau)^m} d\tau, \ t \in \mathbb{R}_+^1 \tag{7.80}
$$

的非常数周期解.

证明 由引理 1, 存在有界闭区域 $T \subset \bar{Q}$, T 是(7.72)的正向不变集, T 内没有奇点, 且 T 内存在周期轨道, 任取(7.72)在 T 的轨道 $\phi(t, r) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t))$, 各 $y_j(t)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, 按公式(7.79)给出. 由(7.79)知, $\phi(t, r)$ 之行为决定于 $\sigma(t)$, $\sigma^{(1)}(t)$, $\cdots$, $\sigma^{(n-1)}(t)$的行为. 考虑积分方程

$$
\sigma(t) = f(t) + \int_0^t A(t-\tau) \frac{1}{1+\sigma(\tau)^m} d\tau, \ \forall t \in \mathbb{R}_+^1. \tag{7.81}
$$

由引理 4 及 Miller 定理, 对(7.81)的有界解 $\sigma(t)$, 存在(7.80)的解 $\sigma_0(t)$ 及实数序列 $\{t_N\}$, $\lim\limits_{N\to\infty} t_N = \infty$, 使得

$$
\lim_{N\to\infty} \sigma(t + t_N) = \sigma_0(t).
$$

可以证明此 $\sigma_0(t)$ 不是(7.80)的常数解, 而且由引理 5 及(*)推出(7.80)的非常数周期解是唯一的(见下面的注 1). 由于轨道 $\phi(t, r) \subset T$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^1$, 故有界, 从而(7.81)的解 $\sigma(t)$ 亦有界. 按 Miller 定理, 对 $\phi(t, r)$的第 n 坐标 $y_n(t)$, 存在实数序列 $\{t_N\}$, $\lim\limits_{N\to\infty} t_N = \infty$, 使得

$$
\lim_{N\to\infty} y_n(t + t_N) = \sigma_0(t) - x_n^*. \tag{7.82}
$$

另外，可以证明

$$\lim_{N\to\infty}\sigma^{(k)}(t+t_N)=\sigma_0^{(k)}(t),\ k=1,\ \cdots,\ n-1,$$

(见注 2)。因此，若在 T 内，(7.72) 的周期轨道 $\Gamma(r_0)$ 的方程为 $(y_1^0(t),\ y_2^0(t),\ \cdots,\ y_n^0(t))$，则存在实数序列 $\{t_N\}$，$\lim\limits_{N\to\infty}t_N=\infty$，使得

$$\lim_{N\to\infty}(y_1^0(t+t_N),\ y_2^0(t+t_N),\ \cdots,\ y_n^0(t+t_N))$$

$$=(w_1(t),\ w_2(t),\ \cdots,\ w_n(t)).$$

注意到 $\lim\limits_{N\to\infty}y_n^0(t+t_N)=\sigma_0(t)-x_n^*$，$y_n^0(t)$ 是周期函数(设其周期为 $\nu>0$)，于是由 Miller 定理得

$$\sigma_0(t+\nu)=\lim_{N\to\infty}y_n^0(t+\nu+t_N)+x_n^*=\lim_{N\to\infty}y_n^0(t+t_N)+x_n^*$$

$$=\sigma_0(t),\ \forall t\in\mathbb{R}_+^1.$$

换言之，$\sigma_0(t)$ 以 ν 为周期，从而 $w_j(t)$，$1\leqslant j\leqslant n$，亦以 ν 为周期。于是

$$\{(w_1(t),\ w_2(t),\ \cdots,\ w_n(t))\mid t\in[0,\ \nu]\}=\Omega_{r_0}=\Gamma(r_0).$$

现来证明唯一性。设系统(7.72)在 T 内还有异于 $\Gamma(r_0)$ 的周期轨道 $\tilde{\Gamma}(r_1)$，于是 $\Gamma(r_0)\cap\tilde{\Gamma}(r_1)=\emptyset$。由上述，有 $\Gamma(r_0)=\Omega_{r_0}=\{(w_1(t),\ w_2(t),\ \cdots,\ w_n(t))\mid t\in[0,\ \nu]\}=\Omega_{r_1}=\Gamma(r_1)$。矛盾。 ∎

推论 1 若系统(7.72)满足命题 7.15 的条件，则此系统在有界闭区域 T 之外不存在周期轨道(异于休止点)。

证明 事实上，设(7.72)在 T 外有周期轨道 $\Gamma(s)$，于是，$\Gamma(s)\cap\Gamma(r_0)=\emptyset$，因 $\Gamma(s)$ 是 Lagrange 稳定的，故 $\Gamma(s)$ 有界，运用命题 7.15 的证明方法，可推出 $\Omega_s=\Gamma(r_0)$，引出矛盾。 ∎

推论 2 设系统(7.72)满足命题 7.15 的条件，则(7.72)存在唯一的周期轨道 $\Gamma(r_0)$，其方程按命题 7.15 的公式 $(w_1(t),\ \cdots,\ w_n(t))$ 给出。 ∎

用上述方法，可解决下列三维系统的周期轨道唯一性问题：

$$\begin{cases}\dot{y}_1=[1+(y_3+x_3^*)^m]^{-1}-\alpha_1 y_1-S_3 x_3^*,\\ \dot{y}_j=y_{j-1}-\alpha_j y_j,\ j=2,\ 3.\end{cases}$$

这便解决了 Tyson[44] 所考虑的负反馈细胞控制系统的周期轨道唯一性问题.

[注 1] 积分方程(7.80)的非常数周期解是唯一的.

首先,(7.80)存在非常数周期解 $\sigma_0(t)$. 事实上,由 Miller 定理,(7.80)存在解 $\sigma_0(t)$满足 $\lim\limits_{N\to\infty}\sigma(t+t_N)=\sigma_0(t)$, 而 $\sigma(t)-x_n^*$ 是系统(7.72)在 T 内的轨道 $\phi(t,r)$的第 n 个坐标 $y_n(t)$; 若(7.72)在 T 内存在周期轨道,则相应之 $\sigma_0(t)$便是周期函数. 又因 T 内不存在奇点,故 $\sigma_0(t)\neq x_n^*$. 此外,若 $\sigma_0(t)$是常数解,即 $\sigma_0(t)=\lambda$, $\lambda\in\mathbf{R}^1$, 则由(7.80)推出:

$$\lambda=\int_0^\infty A(\tau)\frac{1}{1+\lambda^m}d\tau,$$

$$\lambda^{m+1}+\lambda-\int_0^\infty A(\tau)d\tau=0,\quad \int_0^\infty A(\tau)d\tau=1/S_n,$$

$$S_n\lambda^{m+1}+S_n\lambda-1=0,\ \Rightarrow\lambda=x_n^*,$$

引出矛盾.

其次,可证(7.80)的非常数周期解是唯一的.

现设此方程有两个非常数周期解 $\varphi(t)$, $\psi(t)$; 而且

$$\Delta=\max_{t\in\mathbf{R}^1}|\varphi(t)-\psi(t)|>0,$$

于是,注意到

$$\sigma_0(t)=\int_0^\infty A(\tau)\frac{1}{1+[\sigma_0(t-\tau)]^m}d\tau=\int_{-\infty}^t A(t-u)\frac{1}{1+[\sigma_0(u)]^m}du,$$

并且,利用引理 5, 可得

$$\begin{aligned}|\varphi(t)-\psi(t)|&\leqslant L\int_{-\infty}^t|A(t-u)||\varphi(u)-\psi(u)|du\\&\leqslant L\Delta\int_{-\infty}^t|A(t-u)|du\\&=L\Delta\int_{-\infty}^t\sum_{j=1}^n\frac{e^{\cdots}}{|P_j(-\alpha_j)|}du\\&=L\Delta\sum_{j=1}^n\frac{1}{\alpha_j|P_j(-\alpha_j)|}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta\leqslant\left(L\cdot\sum_{j=1}^n\frac{1}{\alpha_j|P_j(-\alpha_j)|}\right)\Delta$$

由(*)得, $\Delta<\Delta$

矛盾,从而 $\varphi(t)=\psi(t)$, $t\in\mathbf{R}^1$.

[注 2] $\lim\limits_{N\to\infty}\sigma^{(k)}(t+t_N)=\sigma_0^{(k)}(t)$, $k=1, \cdots, n-1$.

事实上，从定义出发，可得

$$\sigma_0^{(1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}A^{(1)}(t-u)\frac{1}{1+\sigma_0(u)^m}du+\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{P_j(-\alpha_j)}\right]\frac{1}{1+\sigma_0(t)^m}.$$

由 Miller 定理，对于 $\sigma(t)$，存在实数序列 $\{t_N\}$，$t_N\to\infty$，使

$$\lim_{N\to\infty}\sigma(t+t_N)=\sigma_0(t),$$

现来证明

$$\lim_{N\to\infty}\sigma^{(1)}(t+t_N)=\sigma_0^{(1)}(t).$$

考虑

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)}(t+t_N)-\sigma_0^{(1)}(t)=&f^{(1)}(t+t_N)+\int_0^{t+t_N}A^{(1)}(t+t_N-u)\frac{1}{1+\sigma(u)^m}du\\&+\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{P_j(-\alpha_j)}\right\}\frac{1}{1+\sigma(t+t_N)^m}\\&-\int_{-\infty}^{t}A^{(1)}(t-u)\frac{1}{1+\sigma_0(u)^m}du\\&-\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{P_j(-\alpha_j)}\right\}\frac{1}{1+\sigma_0(t)^m}.\end{aligned}$$

注意到 $N\to\infty$，$f^{(1)}(t+t_N)\to0$；$\dfrac{1}{1+\sigma(t+t_N)^m}\to\dfrac{1}{1+\sigma_0(t)^m}$，故仅需证明，当 $N\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}\Delta_N=&\left[\int_0^{t+t_N}A^{(1)}(t+t_N-u)\frac{1}{1+\sigma(u)^m}du\right.\\&\left.-\int_{-\infty}^{t}A^{(1)}(t-u)\frac{1}{1+\sigma_0(u)^m}du\right]\to0.\end{aligned}$$

可以看出

$$\begin{aligned}\Delta_N=&\int_{-t_N}^{0}A^{(1)}(t-u)\left[\frac{1}{1+\sigma(u+t_N)^m}-\frac{1}{1+\sigma_0(u)^m}\right]du\\&+\int_0^{t}A^{(1)}(t-u)\left[\frac{1}{1+\sigma(u+t_N)^m}-\frac{1}{1+\sigma_0(u)^m}\right]du\\&-\int_{-\infty}^{-t_N}A^{(1)}(t-u)\frac{1}{1+\sigma_0(u)^m}du,\end{aligned}$$

而且 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，使得 $N>M\Rightarrow$

$$\left|\int_{-t_N}^{0}A^{(1)}(t-u)\left[\frac{1}{1+\sigma(u+t_N)^m}-\frac{1}{1+\sigma_0(u)^m}\right]du\right|<\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|P_j(-\alpha_j)|},$$

以及

$$\left|\int_0^{t}A^{(1)}(t-u)\left[\frac{1}{1+\sigma(u+t_N)^m}-\frac{1}{1+\sigma_0(u)^m}\right]du\right|<\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|P_j(-\alpha_j)|}.$$

此外，又有

$$\left|\int_{-\infty}^{-t_N}A^{(1)}(t-u)\frac{1}{1+\sigma_0(u)^m}du\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{|P_j(-\alpha_j)|}e^{-\alpha_jt_N}.$$

因此，当 $N\to\infty$, $t_N\to\infty$, $\Delta_N\to 0$.

类似地可证

$$\lim_{N\to\infty}\sigma^{(k)}(t+t_N)=\sigma_0^{(k)}(t),\ k=2,\ \cdots,\ n-1.$$

可以用上述的方法证明系统(7.66)的周期轨道是唯一的(这需要在 U. an der Heiden 命题 7.14 的假设里，再加条件)。

我们可以考虑下列较广泛的系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=M(x_n)-\alpha_1x_1,\\ \dot{x}_j=x_{j-1}-\alpha_jx_j,\ j=2,\ \cdots,\ n,\ n\geqslant 3,\end{cases}\tag{7.83}$$

其中 $C^{(n-1)}$ 映射 $M:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 满足 Lipschitz 条件

$$|M(r_1)-M(r_2)|\leqslant L|r_1-r_2|,\ \forall r_1,\ r_2\in\mathbb{R}^1,$$

而常数 $\alpha_j>0$, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$; $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n|x_j\geqslant 0,\ j=1,\ \cdots,\ n\}$. 又设方程

$$M(r)-S_nr=0,\ \ S_n=\prod_{j=1}^n\alpha_j,$$

有唯一实根 $x_n^*>0$. 这时，(7.83)有唯一奇点$(x_1^*,\ x_2^*,\ \cdots,\ x_n^*)\in\mathrm{Int}(\mathbb{R}^n_+)$，其中

$$x_1^*=\alpha_2x_2^*=\alpha_2\alpha_3x_3^*=\cdots=\Big(\prod_{j=2}^n\alpha_j\Big)x_n^*,\ M(x_n^*)-S_nx_n^*=0.$$

令 $y_j=x_j-x_j^*$, $j=1,\ \cdots,\ n$, 把(7.83)变成

$$\begin{cases}\dot{y}_1=M(y_n+x_n^*)-S_nx_n^*-\alpha_1y_1\\ \dot{y}_j=y_{j-1}-\alpha_jy_j,\ j=2,\ \cdots,\ n,\end{cases}\tag{7.84}$$

其中 $\alpha_j>0$, $\forall j$; $(y_1,\ \cdots,\ y_n)\in\overline{Q}=\{(y_1,\ \cdots,\ y_n)\in\mathbb{R}^n|y_j\geqslant -x_j^*,\ \forall j\}$. (7.84)有唯一奇点$(0,\ \cdots,0)\in\mathrm{Int}(\overline{Q})$. (7.84)与下列 n 阶方程等价

$$(D^n+S_1D^{n-1}+\cdots+S_{n-1}D+S_n)y=M(y+x_n^*)-S_nx_n^*,\tag{7.85}$$

其中 $D=d/dt$, $y=y_n$, S_1, $\cdots$, S_n 是 α_j, $j=1$, $\cdots$, n 的初等对称函数，即

$$S_1=\sum_{j=1}^n\alpha_j,\ \ S_2=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n\alpha_i\alpha_j,\ \cdots,\ S_n=\prod_{j=1}^n\alpha_j.$$

如果 $\alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j$，则(7.85)对应于初值条件 $y(0), y^{(1)}(0), \cdots, y^{(n-1)}(0)$ 的解 $y(t)$ 满足 Volterra 积分方程

$$y(t)+x_n^*=\int_0^t A(t-\tau) M\left[y(\tau)+x_n^*\right] d\tau+h(t), \quad t \geqslant 0, \tag{7.86}$$

其中
$$A(s)=\sum_{j=1}^n\{\exp(-\alpha_j s)\}\{P_j(-\alpha_j)\}^{-1},$$

$$P_j(\sigma)=(\sigma+\alpha_j)^{-1} \prod_{l=1}^n(\sigma+\alpha_l),$$

$$P_j(-\alpha_j)=(\alpha_1-\alpha_j) \cdots(\alpha_{j-1}-\alpha_j)(\alpha_{j+1}-\alpha_j) \cdots(\alpha_n-\alpha_j),$$

$$h(t)=\sum_{j=1}^n\left\{\sum_{k=0}^{n-1} C_k(-\alpha_j)^{n-k-1}-S_n x_n^*\right\}\{\exp(-\alpha_j t)\}\{P_j(-\alpha_j)\}^{-1},$$

而 $C_k, k=0, \cdots, n-1$ 则是 $y(0), y^{(1)}(0), \cdots, y^{(n-1)}(0)$ 的线性组合：

$$\begin{aligned}
& C_0=y(0), \\
& C_1=y^{(1)}(0)+S_1 y(0), \\
& C_2=y^{(2)}(0)+S_1 y^{(1)}(0)+S_2 y(0), \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& C_k=y^{(k)}(0)+S_1 y^{(k-1)}(0)+\cdots+S_k y(0), \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& C_{n-1}=y^{(n-1)}(0)+S_1 y^{(n-2)}(0)+\cdots+S_{n-1} y(0).
\end{aligned} \tag{7.87}$$

可以证明，映射 $h: \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ 是有界的、一致连续的；而且下列关系成立：

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_0^t A(t-\tau) M(u(\tau)) d\tau+h(t), \\
u^{(1)}(t) &= \int_0^t A^{(1)}(t-\tau) M(u(\tau)) d\tau \\
&\quad +\left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{P_j(-\alpha_j)}\right] M(u(t))+h^{(1)}(t),
\end{aligned} \tag{7.88}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}
u^{(k)}(t) &= \int_0^t A^{(k)}(t-\tau) M(u(\tau)) d\tau \\
&\quad +\sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^n \frac{(-\alpha_j)^l}{P_j(-\alpha_j)} M^{(k-l)}(u(t))+h^{(k)}(t),
\end{aligned}$$

$k=1,\cdots,n-1;\ u(t)=y(t)+x_n^*;$

由(7.84)及(7.88)可得

$$
\begin{aligned}
y_n(t)&=u(t)-x_n^*,\\
y_{n-1}(t)&=u^{(1)}(t)+\alpha_n u(t)-\alpha_n x_n^*,\\
y_{n-2}(t)&=u^{(2)}(t)+(\alpha_{n-1}+\alpha_n)u^{(1)}(t)+\alpha_{n-1}\alpha_n u(t)\\
&\quad-\alpha_{n-1}\alpha_n x_n^*,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_1(t)&=u^{(n-1)}(t)+(S_1-\alpha_1)u^{(n-2)}(t)\\
&\quad+(S_2-\alpha_1(S_1-\alpha_1))u^{(n-3)}(t)\\
&\quad+(S_3-\alpha_1(S_2-\alpha_1(S_1-\alpha_1)))u^{(n-4)}(t)+\cdots\\
&\quad+S_n u(t)-S_n x_n^*,
\end{aligned}
\tag{7.89}
$$

其中 $u(t)$满足(7.88)。

于是，运用 Miller 定理，可以证明下列命题：

命题 7.16（李炳熙[106]） 设系统(7.84)存在周期轨道 $\gamma\subset T$，其中 $T\subset\bar{Q}$ 是(7.84)的有界、正向不变集，其内无奇点，而且 $\alpha_i\neq\alpha_j$，$i\neq j$；

$$L\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\alpha_j|P_j(-\alpha_j)|}\right]<1,$$

则 γ 是(7.84)在相空间 $\bar{Q}$ 内的唯一周期轨道；此外，γ 的方程可表为$(\omega_1(t),\cdots,\omega_n(t))$，其中

$$
\begin{aligned}
\omega_n(t)&=u_0(t)-x_n^*,\\
\omega_{n-1}(t)&=u_0^{(1)}(t)+\alpha_n u_0(t)-\alpha_n x_n^*,\\
\omega_{n-2}(t)&=u_0^{(2)}(t)+(\alpha_{n-1}+\alpha_n)u_0^{(1)}(t)+\alpha_{n-1}\alpha_n u_0(t)\\
&\quad-\alpha_{n-1}\alpha_n x_n^*,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega_1(t)&=u_0^{(n-1)}(t)+(S_1-\alpha_1)u_0^{(n-2)}(t)\\
&\quad+(S_2-\alpha_1(S_1-\alpha_1))u_0^{(n-3)}(t)\\
&\quad+(S_3-\alpha_1(S_2-\alpha_1(S_1-\alpha_1)))u_0^{(n-4)}(t)+\cdots\\
&\quad+S_n u_0(t)-S_n x_n^*,
\end{aligned}
$$

而 $u_0(t)$ 是 $$u_0(t)=\int_0^\infty A(\tau)M(u_0(t-\tau))d\tau,\ t\in\mathbb{R}^1_+$$
的非常数周期解.

推论 设 $f=\text{const.}$, $0<a$, $0<p<q$, $p\neq a\neq q$,

$$K=ae^{-f}|b|(q-p)e^{-b(q-p)/pq}\left[\frac{1}{a|p-a||q-a|}+\frac{1}{p|a-p||q-p|}+\frac{1}{q|a-q||p-q|}\right]<1,$$

而且 $$b<-\frac{(p+q)(pq+a(a+p+q))}{(q-p)ax^*(1-x^*)},$$

其中 x^* 是 $$x^*=\frac{1}{1+\exp[-f-bx^*(q-p)/pq]}$$
的唯一正根,则系统(7.66)存在唯一的周期轨道.

证明 首先注意到

$$Q=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1/p,\ 0\leqslant z\leqslant 1/pq\}$$
是(7.66)的正向不变集. 周期轨道的存在性由 U. an der Heiden 证得. 至于唯一性,可循上命题(即命题7.16)推得,其中关键是证明积分方程

$$u(t)=\int_0^\infty A(\tau)M(u(t-\tau))d\tau,\ t\in\mathbb{R}^1_+$$

的非常数周期解之唯一性,目前,即要证下列积分方程之非常数周期解是唯一的:

$$u(t)=\int_0^\infty\left[\frac{e^{-a\tau}}{(p-a)(q-a)}+\frac{e^{-p\tau}}{(a-p)(q-p)}+\frac{e^{-q\tau}}{(a-q)(p-q)}\right]M(u(t-\tau))d\tau$$

其中 $$M(r)=a/[1+e^{-f}e^{-b(q-p)r}].$$

注意及上积分方程可改写为

$$u(t)=\int_{-\infty}^t\left[\frac{e^{-at}e^{as}}{(p-a)(q-a)}+\frac{e^{-pt}e^{ps}}{(a-p)(q-p)}+\frac{e^{-qt}e^{qs}}{(a-q)(p-q)}\right]M(u(s))ds,$$

设这个方程有两个非常数周期解 $\varphi(t)$, $\psi(t)$, 且 $\Delta=\max\limits_{t\in\mathbb{R}^1}|\varphi(t)-\psi(t)|>0$, 则有

$$
\begin{aligned}
&|M(\varphi(s))-M(\psi(s))| \\
&\qquad \leqslant ae^{-t}|b|(q-p)e^{-b(q-p)/pq}|\varphi(s)-\psi(s)|,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\varphi(t)-\psi(t)| &\leqslant \int_{-\infty}^{t}\left[\frac{e^{-at}e^{as}}{|p-a||q-a|}+\frac{e^{-pt}e^{ps}}{|a-p||q-p|}\right. \\
&\qquad \left.+\frac{e^{-qt}e^{qs}}{|a-q||p-q|}\right]|M(\varphi(s))-M(\psi(s))|ds \\
&\leqslant K\Delta
\end{aligned}
$$

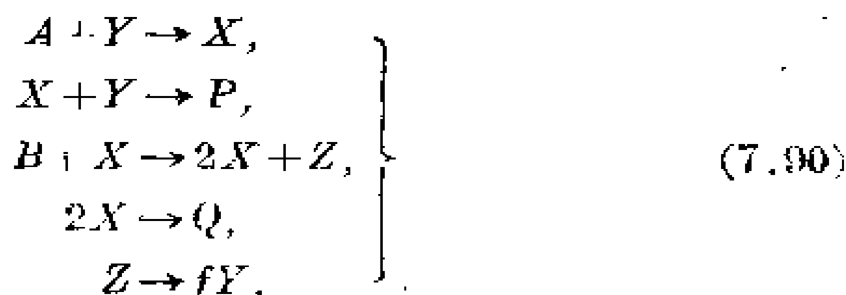
$\Rightarrow \Delta\leqslant K\Delta<\Delta$, 引起矛盾. 所以 $\varphi(t)=\psi(t)$, $t\in\mathbb{R}^1$ ∎

[注] [105]在证明(7.80)的非常数解是唯一的时, 有错误, 一般而言, 这并不成立(蒙西德 U. an der Heiden 教授及中国科学院数学所丁伟岳同志向作者指出这点, 在此表示感谢). 故有关定理需加以修改, 现附加条件 (*), 可保证周期轨道唯一性, 但稳定性问题没有解决. [106]亦有类似问题.

7.4.5 描写 Belousov-Zhabotinskii 化学反应的三维动力系统的周期轨道存在性

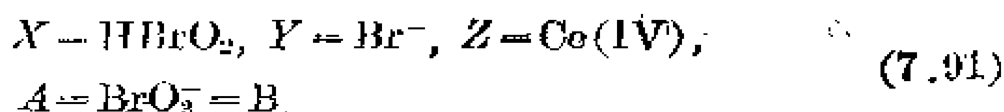
Hastings 与 Murray[47] 用 Brouwer 不动点定理研究了一个描写 Belousov-Zhabotinskii (Белоусов-Жаботинский) 化学反应(参考 Белоусов [169] 及 Жаботинский [170])的三维动力系统的周期轨道存在性问题. 这个数学模型, 首先由 Field 和 Noyes 提出(参考 Field 及 Noyes [171]). Winfree [172] 对这种化学反应作过有趣的综述. Field [153]提供了一种实验配方. Field-Noyes 的模型大概如下:

这模型由下列五个不可逆反应组成:



$$
\left.\begin{aligned}
A+Y &\to X, \\
X+Y &\to P, \\
B+X &\to 2X+Z, \\
2X &\to Q, \\
Z &\to fY,
\end{aligned}\right\}\qquad (7.90)
$$

其中 f 是化学计量系数(stoichiometric factor)，P 和 Q 是产物，而



$$X = HBrO_2,\ Y = Br^-,\ Z = Ce(IV),\qquad (7.91)$$
$$A = BrO_3^- = B.$$

在此反应中，铈离子的比值 Ce(IV)/Ce(III) 随时间变化而振荡. 可用一适当的显示器把这振荡显示为颜色的变化.

用 X, Y, Z, A 及 B 表示它们各自代表的量的浓度，则此反应的动力学方程为

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = k_1AY - k_2XY + k_3BX - 2k_4X^2, \\ \dfrac{dY}{dt} = -k_1AY - k_2XY + fk_5Z, \\ \dfrac{dZ}{dt} = k_3BX - k_5Z. \end{cases} \qquad (7.92)$$

其中各常数之值为(按 Field-Noyes[171])：

$$k_1 \cong 1.34\,M^{-1}sec^{-1},\ k_2 \cong 1.6\times10^9\,M^{-1}sec^{-1},$$
$$k_3 \cong 8\times10^3\,M^{-1}sec^{-1},\ k_4 \cong 4\times10^7\,M^{-1}sec^{-1},$$
$$A \simeq B = 6\times10^{-2}M,\ f,\ k_5(sec^{-1}) > 0,\ \text{皆为 } O(1).$$

选用无量纲变量 x, y, z, τ, s, w, q 如下：

$$[HBrO_2] \equiv X = \frac{k_1A}{k_2}x = 5.025\times10^{-11}x,$$
$$[Br^-] \equiv Y = \frac{k_3B}{k_2}y = 3\times10^{-7}y,$$
$$[Ce(IV)] \equiv Z = \frac{k_1k_3AB}{k_2k_5}z = 2.412\times10^{-8}\frac{z}{d},$$
$$t = (k_1k_3AB)^{-1/2}\tau = 1.610\times10^{-1}\tau,$$
$$s = \left(\frac{k_3B}{k_1A}\right)^{1/2} = 7.727\times10,\quad q = \frac{2k_1k_4A}{k_2k_3B} = 8.375\times10^{-6},$$
$$d = \frac{k_5\,sec^{-1}}{1\,sec^{-1}},\quad w = k_5(k_1k_3AB)^{-1/2} = 1.610\times10^{-1}d > 0.$$

这样一来，方程(7.92)变成无量纲向量方程

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r};s,w,f,q),\ \boldsymbol{r}=(x,y,z); \tag{7.93}$$

或用坐标形式表出，有

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\tau}=s(y-xy+x-qx^2);\\ \dfrac{dy}{d\tau}=\dfrac{1}{s}(fz-y-xy),\\ \dfrac{dz}{d\tau}=w(x-z).\end{cases} \tag{7.94}$$

现来讨论此三维动力系统的奇点. 有物理意义的奇点为: (0, 0, 0)及 $\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, 其中

$$z_0=x_0,\ y_0=\frac{fx_0}{1+x_0}=\frac{1}{2}[(1+f)-qx_0],$$

$$2qx_0=(1-f-q)+[(1-f-q)^2+4q(1+f)]^{1/2}.$$

(有物理意义的奇点(x_0,y_0,z_0)应满足 $x_0\geqslant 0$, $y_0\geqslant 0$, $z_0\geqslant 0$.) (0, 0, 0)是不稳定奇点, 因这时特征方程为

$$\lambda^3-\lambda^2\left(s-\frac{1}{s}-w\right)-\lambda\left(1+sw-\frac{w}{s}\right)+w(1+f)=0,$$

其三个根 λ_1, λ_2, λ_3 满足 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=w(1+f)>0$, 故至少有一根具正实部.

对于奇点 $\boldsymbol{r}_0$, 对应的特征方程为

$$\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c=0,$$

其中

$$\begin{aligned}a&=w+\left[sy_0+\left(\frac{1}{s}+2qs\right)x_0+\left(\frac{1}{s}-s\right)\right]\\&=w+\left[x_0\left(\frac{1}{s}+\frac{3}{2}qs\right)+\frac{s}{2}(f-1)+\frac{1}{s}\right],\\b&=[2qx_0^2+x_0(q-1)+f]\\&\quad+w\left[sy_0+\left(\frac{1}{s}+2qs\right)x_0+\left(\frac{1}{s}-s\right)\right],\\c&=wx_0[2qx_0+q+(f-1)].\end{aligned}$$

此特征方程全部特征根皆具负实部的充要条件为:

$$a>0,\ c>0,\ ab-c>0.$$

注意及：$f\geqslant 1\Rightarrow a>0$；$0\leqslant f<1$ 时，因

$$\frac{3}{2}qx_0+(f-1)\frac{s}{2}=\frac{3s}{2}[(1-f-q)^2+4q(1+f)]^{1/2}$$
$$+\frac{3s}{2}\left[\frac{2}{3}(1-f)-q\right]>0,$$

故 $a>0$. 而且 $\forall f>0,\ q>0,\ w>0$，有

$$c=wx_0[2qx_0+q+f-1]$$
$$=wx_0[(1-f-q)^2+4q(1+f)]^{1/2}>0.$$

所以奇点 r_0 为不稳定的充要条件为 $ab-c\leqslant 0$. 如果有

$$0<w<-\frac{1}{2E}[E^2+f(1-x_0)]+\frac{1}{2E}[\{E^2+f(1-x_0)\}^2$$
$$-4E^2\{2qx_0^2+x_0(q-1)+f\}]^{1/2}, \tag{7.95}$$

其中 $E=sy_0^2+\left(\frac{1}{s}+2qs\right)x_0+\frac{1}{s}-s$，则有 $ab-c\leqslant 0$. 而且，若不等式(7.95)之右方为正数，便有

$$2qx_0^2+x_0(q-1)+f<0. \tag{7.96}$$

注意及 $2qx_0=(1-f-q)+[(1-f-q)^2+4q(1+f)]^{1/2}$，$q=8.375\times 10^{-5}$，可得

$$0.500<f<2.412, \tag{7.97}$$

当 w 及 f 满足(7.95)、(7.97)时，r_0 的特征方程有两根具正实部.

Murray[173] 证明了，当 $q\ll 1$，下列集合 B 是系统(7.94)的正向不变集：

$$B=\left\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3\,|\,1\leqslant x\leqslant\frac{1}{q},\ y_1\leqslant y\leqslant y_2,\ 1\leqslant z\leqslant\frac{1}{q};\right.$$
$$\left.y_1=\frac{fq}{1+q},\quad y_2=\frac{f}{2q}\right\}.$$

B 内仅有系统(7.94)的一个奇点 $r_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)$. 用 $x=x_0$，$y=y_0$，$z=z_0$ 这三个平面把 B 分为八个子区域，如图 24.

可以看出系统(7.94)在$\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 | x>0,\ y>0, z>0\}$的轨道必进入$B$内，而$B$内的轨道不能离开$B$. 假设系统的参数满足(7.95)，(7.96)及(7.97)，故(x_0, y_0, z_0)为不稳定奇点，系统在(x_0, y_0, z_0)邻域的线性化系统有两个具正实部的特征根，一个负特征根。这时，可以证明：除却两条轨道之外，进入B_4或B_5的轨道不能停留在B_4或B_5内；自$B\setminus(B_4\cup B_5)$出发的轨道不能进入B_4或B_5；进入B_1, B_2, B_3, B_6, B_7, B_8的轨道或者来自B之外，或者来自B_4或B_5，而且这种轨道必进入B_3，以后便按下列顺序在B内振动

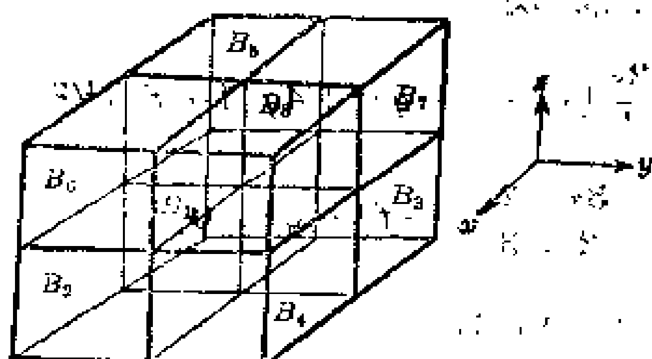


图　24

B_1: $1\leqslant x\leqslant x_0$, $y_1\leqslant y\leqslant y_0$, $1\leqslant z\leqslant z_0$;
B_2: $x_0\leqslant x\leqslant 1/q$, $y_1\leqslant y\leqslant y_0$, $1\leqslant z\leqslant z_0$;
B_3: $1\leqslant x\leqslant x_0$, $y_0\leqslant y\leqslant y_2$, $1\leqslant z\leqslant z_0$;
B_4: $x_0\leqslant x\leqslant 1/q$, $y_0\leqslant y\leqslant y_2$, $1\leqslant z\leqslant z_0$;
B_5: $1\leqslant x\leqslant x_0$, $y_1\leqslant y\leqslant y_0$, $z_0\leqslant z\leqslant 1/q$;
B_6: $x_0\leqslant x\leqslant 1/q$, $y_1\leqslant y\leqslant y_0$, $z_0\leqslant z\leqslant 1/q$;
B_7: $1\leqslant x\leqslant x_0$, $y_0\leqslant y\leqslant y_2$, $z_0\leqslant z\leqslant 1/q$;
B_8: $x_0\leqslant x\leqslant 1/q$, $y_0\leqslant y\leqslant y_2$, $z_0\leqslant z\leqslant 1/q$.

$$B_3\to B_1\to B_2\to B_6\to B_8\to B_7\to B_3\to\cdots. \qquad (7.98)$$

现来证明此事实.

先考虑B_4，在此区域$z\leqslant x$，故$\dot{z}\geqslant 0$. 因此B_4内的任一轨道或者趋于奇点$\boldsymbol{r}_0$，或者与B_4在B内的三个边界面之一相交. 由于系统(7.94)在(x_0, y_0, z_0)邻域的线性化系统仅有一个负特征根，故自B_4内部趋于$\boldsymbol{r}_0$（当$t\to\infty$）的轨道只有一条（另一条在B_5内从相反方向趋于$\boldsymbol{r}_0$）. B_4内其它一切轨道与下列平面区域之一相交

$$F_1=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 | x_0<x<1/q,\ y_0\leqslant y\leqslant y_2,\ z=z_0\},$$

$$F_2=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 | x_0\leqslant x\leqslant 1/q,\ y=y_0,\ 1\leqslant z<z_0\},$$

$$F_3=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 | x=x_0,\ y_0<y\leqslant y_2,\ 1\leqslant z\leqslant z_0\}.$$

可以看出：系统(7.94)在F_1, F_2, F_3上的向量场均指向B_4之外，

故自 $B\backslash B_4$ 出发的轨道不能进入 B_4 内. 事实上,在 F_1, $z<x$, 故 $\dot{z}>0$, 从而轨道离开 B_4. 在 F_2, $\dot{y}=fz-(1+x)y_0<fz_0-(1+x_0)y_0=0$, 故轨道亦离开 B_4. 在 F_3, 首先证明一个不等式, 令 $g(x, y)=y-xy+x-qx^2$, 我们有

$$g(x, y)\begin{cases}<0, & \text{当 } x\in[x_0, 1/q],\ y\in(y_0, y_2],\\ >0, & \text{当 } x\in(1, x_0],\ y\in[y_1, y_0).\end{cases}$$

注意及 $(\partial/\partial y)g(x, y)=1-x<0$, $\forall x>1$. 因 $g(x_0, y_0)=0$, 故当 $y<y_0$ 时, $g(x_0, y)>0$; 当 $y>y_0$ 时, $g(x_0, y)<0$. 再有, 我们若能证明 $g(x, y_0)>0$, $x\in(1, x_0)$; $g(x, y_0)<0$, $x\in(x_0, 1/q]$, 则上述不等式成立.

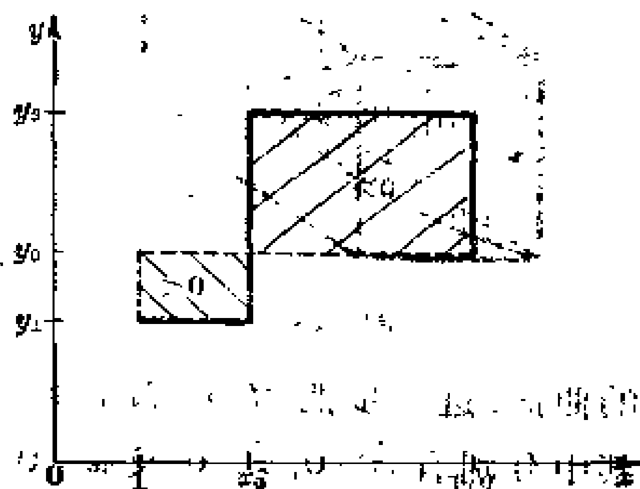


图 25

在 $x=x_0$, $(\partial/\partial x)g(x, y_0)=-y_0+1-2qx_0$. 但 $y_0=fx_0/(1+x_0)$ 而且 $qx_0^2+qx_0-x_0+fx_0=1+f$. 由此可得

$$-y_0+1-2qx_0=\frac{-f-qx_0-qx_0^2}{1+x_0}<0,$$

所以在 $x=x_0$ 邻域 $g(x, y_0)$ 具上述性质. 设 $g(x, y_0)>0$, $g(x, y_0)<0$ 这两不等式中任一个在其它某处不成立, 则存在某 $x\in(1, 1/q]$, 使得 $g(x, y_0)=0$, 但是二次方程 $g(x, y_0)=0$ 的两个根是异号的, 而且已知有一根为 $x=x_0$, 矛盾; 所以两个关于 $g(x, y_0)$ 的不等式成立.

特别地, 从上述知, $\dot{x}<0$(在 F_3), 所以自 $B\backslash B_4$ 出发的轨道不能进入 B_4 内. 同理可证: 自 $B\backslash B_5$ 出发的轨道不能进入 B_5 内.

其次, 考虑系统(7.94)在其余子区域内的轨道的行为. 先从

容易的入手．在 B_2，$z<x$，故 $\dot{z}>0$，又沿边界面 $x=x_0$，$1\leqslant z\leqslant z_0$，$y_1\leqslant y<y_0$，有 $\dot{x}=g(x_0, y)>0$．在棱 $x=x_0$，$y=y_0$，$1\leqslant z\leqslant z_0$ 处，有 $\dot{y}<0$．所以 B_2 内任一轨道必趋于平面 $z=z_0$，但不能进入 B_4 或 B_1．同时，B_2 内的轨道亦不趋于奇点(x_0, y_0, z_0)．于是 B_2 内的轨道必与平面 $z=z_0$ 相交并进入 B_6 内．同理可证，B_7 内的轨道直接进入 B_8 内．

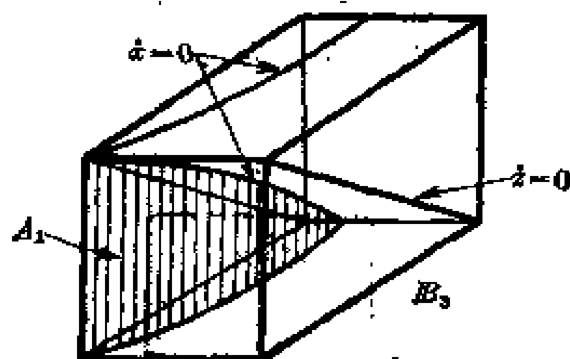


图 26

现转到讨论 B_3(及 B_6)的情形．方程 $\dot{z}=0(\Leftrightarrow x=z)$决定了一个把 B_3 分为两半的平面(在此，注意及 $x_0=z_0$)．先看下半部(即 $z<x$ 或 $\dot{z}<0$ 那部分)．由 $\dot{x}=0$ $(\Leftrightarrow y=(x-qx^2)/(x-1))$所决定的曲面，进一步把 B_3 中满足 $z<x$ 的区域分为两部分，A_1 和 A_2，其中分别有 $\dot{x}>0$，$\dot{z}>0$ 及 $\dot{x}<0$，$\dot{z}>0$(见图 26)．

区域 A_1 包含三角形 $y=y_0$，$1\leqslant x<x_0$，$1\leqslant z<x$．可以证明：A_1 中的轨道必穿过平面 $y=y_0$ 而离开 A_1 进入 B_1．事实上，在 A_1 及在平面 $z=x_0$，$y\geqslant y_0$ 上，有

$$\dot{y}=(1/s)(fz-y-xy)\leqslant(1/s)(fx-y_0-xy_0)$$
$$=(1/s)[x(f-y_0)-y_0].$$

但是 $y_0=fx_0/(1+x_0)<f$，所以

$$\dot{y}<(1/s)[x_0(f-y_0)-y_0]=(1/s)(fz_0-y_0-x_0y_0)=0.$$

没有轨道能穿过 $\dot{z}=0$ 或 $\dot{x}=0$ 而离开 A_1(因当 $\dot{z}=0$，$\dot{x}>0$ 时，我们有 $\ddot{z}=w\dot{x}>0$；而当 $\dot{x}=0$，$\dot{y}<0$，则 $\ddot{x}=\dot{y}(1-x)>0$)．

若 $\dot{z}=\dot{x}=0$，$\dot{y}<0$，则 $\ddot{z}=0$，但 $\dddot{z}=w\ddot{x}>0$．因此可下结论：任一进入 A_1 的轨道必离开 A_1 直接进入 B_1．

可以看出 B_3 内任一出发自 $z>x$ 这区域、然后与平面 $z=x$ 相交的轨道，必进入 A_1．事实上，在交点处，$\dot{z}=0$ 及 $0\leqslant\ddot{z}=w\dot{x}$，而且若 $\dot{x}=0$，则 $\dddot{z}=w\ddot{x}=w\dot{y}(1-x)>0$，所以，在与 $z=x$ 相交以后

马上有 $\dot{x}>0$ 及 $\dot{z}>0$.

但这蕴含着 B_3 内任一轨道或者穿过 $y=y_0$ 而离开 B_3, 或者进入 A_1(然后穿过同一平面 $y=y_0$ 而离开 B_3). 事实上, 若不然, 则轨道将永远留在平面 $x=z$ 之上或之下, 这时 z 趋于一有限极限. 可是, 因 B_3 内任一轨道不趋于奇点, 故这是不可能的.

总之, B_3 内任一轨道必进入 B_1. 同理可证: B_6 内任一轨道必进入 B_8.

最后, 讨论进入 B_1(或 B_8)的轨道的行为. 若此轨道来自 B_5, 则它必进入 B_3, 但正如上述, 它随着穿过平面 $y=y_0$ (但在直线 $\dot{y}=0$ 以下)返回 B_1. 因此可假设在进入 B_1 时有 $\dot{y}\geqslant 0$. 在子区域 B_1 内, $\dot{x}>0$, 所以一旦此轨道进入 B_1 中满足 $\dot{z}\leqslant 0(z\leqslant x)$ 这区域, 它必逗留在该处, 直到进入 B_2 为止. 另方面, 若 $\dot{z}<0$, 则因 $\dot{y}=0\Rightarrow\ddot{y}=f\dot{z}-\dot{x}y<0$, 故 $\dot{y}$ 保持负值, 而轨道不能重返 B_3. 再因 $\dot{x}>0$, 故此轨道必穿过平面 $x=z$ 而进入 B_2. 同理可证 B_8 的情形. 所以(7.98)的振荡顺序成立.

命题 7.17(Hastings-Murray[47]) 设系统(7.94)满足条件(7.95), (7.96), (7.97), 则(7.94)存在周期轨道.

证明 考虑满足初值条件 $x(0)\in[x_0, 1/q]$, $y(0)\in[y_1, y_0]$, $z(0)=z_0$ 的轨道 $\boldsymbol{r}(\tau)=(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$. 于是 $\boldsymbol{r}(0)$ 位在分隔 B_6 与 B_2 的平面区域 F 上. 由上述讨论知, $\exists T>0$ 使 $\boldsymbol{r}(T)\in F$. 又如 $\boldsymbol{r}(0)\neq\boldsymbol{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$, 则这种 T 值中存在最小者, 仍记之为 $T=T(\boldsymbol{r}(0))$. 由下式定义的映射 $p: F\to F$

$$p(\boldsymbol{r}(0))=\boldsymbol{r}(T),\quad \text{当 } \boldsymbol{r}(0)\neq\boldsymbol{r}_0,$$

$$p(\boldsymbol{r}_0)=\boldsymbol{r}_0,$$

是连续的. $\boldsymbol{r}_0$ 是映射 p 的不动点, p 的任何其它不动点则对应于系统(7.94)的周期轨道.

为了证明 p 存在异于 $\boldsymbol{r}_0$ 的不动点, 我们设法找到一光滑曲线 $\gamma\subset F$, 使具下列性质:

(甲) $r_0 \notin \gamma$;

(乙) $\gamma \subset \mathrm{Int}(F)$(除却其两端点，一个在 $x=x_0$，另一在 $y=y_0$);

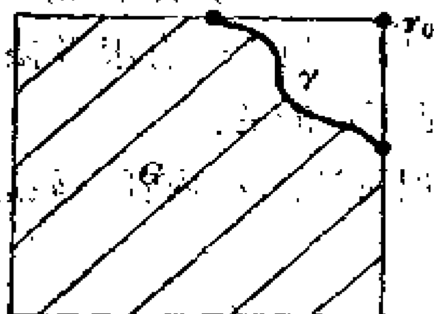


图 27

(丙) 区域 $G \subset F$(见图 27)有性质：$p: G \to G$.

如果这些能实现，则对映射 $p: G \to G$ 运用 Brouwer 不动点定理，马上证实 p 存在异于 r_0 的不动点，从而(7.94)存在周期轨道.

为了定义 γ，考虑系统(7.94)在 r_0 邻域的线性化方程

$$\dot{u}=Mu, \tag{7.99}$$

其中
$$M=\begin{bmatrix} s(-y_0+1-2qx_0) & s(1-x_0) & 0 \\ -y_0/s & -(1+x_0)/s & f/s \\ w & 0 & -w \end{bmatrix}.$$

这里 $u=r-r_0$，我们已设 M 有一特征根 $\lambda_1<0$，另两特征根 $\lambda_2=\mu_2+i\sigma$，$\lambda_3=\mu_3-i\sigma$，$\mu_2>0$，$\mu_3>0$. 作坐标变换 $u=Av$，可把上线性方程变为标准形

$$\dot{v}=Nv,$$

其中
$$N=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\sigma \\ 0 & \sigma & \mu_3 \end{bmatrix} \quad 及 \quad v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

令 L 是 $\mathbb{R}^3$ 中经过 r_0、平行于 M 的特征根 λ_1 所对应的特征方向 e 的直线. $\forall \alpha>0$，考虑曲面 C_α，其方程为(在 v 坐标系中)

$$v_2^2+v_3^2=\alpha.$$

每个 C_α 都是以 L 为轴的椭圆柱面. 沿着系统(7.99)的解曲线，有

$$(v_2^2+v_3^2)'=\mu_2 v_2^2+\mu_3 v_3^2>0 \quad (当\ v_2^2+v_3^2=\alpha).$$

所以系统(7.99)的轨道由内而外地穿过 C_α. 当 α 及 $\|r-r_0\|$ 充分小时，系统(7.94)的轨道仍有同样性质. 更详细地说，对系统

(7.94), 即

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}; s, w, f, q)$$

作坐标变换 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=A\boldsymbol{\rho}$, 其中 A 为上述坐标变换的矩阵. 则有

$$(\rho_2^2+\rho_3^2)'=2\mu_2\rho_2^2+2\mu_3\rho_3^2+o(|\boldsymbol{\rho}|^2)\quad (\text{当 } |\boldsymbol{\rho}|\to 0 \text{ 时}).$$

现要证明: 存在 $\delta>0$, 使当 $\boldsymbol{r}\in B\backslash(B_4\cup B_5)$, 则 $\rho_2^2+\rho_3^2\geqslant\delta\rho_1^2$. 从而在 $B\backslash(B_4\cup B_5)$有

$$(\rho_2^2+\rho_3^2)'=2\mu_2\rho_2^2+2\mu_3\rho_3^2+o(\rho_2^2+\rho_3^2).$$

这等价于 $L\cap B$ 严格位于 $B_4\cup B_5$ 内, 而不在其边界面上. 注意及 $\lambda_1<0$, $1-x_0<0$, $-y_0+1-2qx_0<0$, 由方程 $M\boldsymbol{e}=\lambda_1\boldsymbol{e}$ 看出这条件是满足的.

对充分小的 $\alpha>0$, 令 $\gamma=C_\alpha\cap F$, 即为所求之 γ. 于是自 G 出发的任一轨道 $\boldsymbol{r}(\tau)$必处在 C_α 之外, 因它又属于 $B\backslash(B_4\cup B_5)$, 它不能与 C_α 相交, 故 $\boldsymbol{r}(T)\in G$. ∎

7.4.6 描写生物化学 Michaelis-Menten 机制的三维动力系统的周期轨道存在性

Dai[48] 讨论了生物化学中的 Michaelis-Menten 机制(参考 Michaelis 与 Menten[174]). 该理论的基本假设是: 首先由一酶 E 和一底物 S 发生反应形成一络合物 A, 随着这络合物 A 破裂, 形成一自由酶 E 和一个或多个产物 P. 这些反应可用下列化学符号表示:



$$\left.\begin{array}{l} E+S \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} A \\ A \xrightarrow{k_3} E+P \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{R}_1)$$

这里, E, S, A, P 分别代表酶, 底物, 络合物及产物的浓度. 对反应(R_1)运用质量作用定律(law of mass action)可得非线性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -k_1(E_t - A)S + k_2 A, \\ \dfrac{dA}{dt} = k_1(E_t - A)S - (k_2 + k_3)A, \\ \dfrac{dP}{dt} = k_3 A, \end{cases} \tag{R$_2$}$$

其中 k_1, k_2, k_3 是反应率，E_t 是全体酶，按假设它是常数.

(R_2)没有非常数周期解. 但如果考虑恒温化学反应，它发生在一个由薄膜围成的空间内，而这空间则浸没在一个储有浓度固定的反应物和产物的池中. 某特定物质穿过此薄膜的渗透率是该物质的浓度的函数(或者是别一物质的浓度的函数). 这样，反应与渗透的配合产生某种反馈作用，从而使 Michaelis-Menten 机制出现某些有趣的现象. 如考虑薄膜的渗透率在内，(R_2)这系统可改为

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -k_1(E_t - A)S + k_2 A + h_S(P)(S^* - S), \\ \dfrac{dA}{dt} = k_1(E_t - A)S - (k_2 + k_3)A, \\ \dfrac{dP}{dt} = k_3 A + h_P(P^* - P), \end{cases} \tag{R$_3$}$$

其中 h_S 及 h_P 是薄膜的渗透率. 假设 h_S 是 P 的函数，呈形式 $h_S(0)/(1+(P/\pi)^\rho)$; h_P 则为常数; S^* 及 P^* 为常数.

Hahn-Ortoleva-Ross[175] 用数值计算显示 (R_3) 有极限环，相应的参数值为

$$k_1 = 0.2,\ k_2 = 0.01,\ k_3 = 0.1,\ E_t = 0.1,$$
$$S^* = 10,\ P^* = 0,\ \pi = 0.3,\ h_P = 0.002,$$
$$h_S = 10^{-3}[1 + (P/\pi)^{100}]^{-1}.$$

[48] 用 Brouwer 不动点定理严格地证明了这周期解的存在性.

先作一些简化. 令

$$x = S/S^*,\ y = k_3 A/h_P \pi,\ z = P/\pi,$$

$$t=(k_1E_t)^{-1}\tau,\ u=h_P\pi k_2/E_tS^*k_1k_3,$$
$$v=(k_2+k_3)h_P\pi/k_1k_3E_tS^*,$$
$$w=h_P\pi/k_3S^*,\ a=h_P\pi/k_3E_t,$$
$$b=h_S(0)/k_1E_t,\ d=h_P/k_1E_t,$$

系统(R_3)变成下列无量纲方程:

$$\frac{d\gamma}{d\tau}=F(\gamma,\ a,\ b,\ d,\ u,\ v,\ w,\ \rho),$$
$$\gamma=(x,\ y,\ z)$$

或

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau}=-x+axy+uy+\dfrac{b}{1+z^\rho}(1-x), \\ w\dfrac{dy}{d\tau}=x-axy-vy, \\ \dfrac{dz}{d\tau}=d(y-z). \end{cases} \tag{7.100}$$

以下一律假设 $\rho\geqslant 1$, $v>u$, $a<\epsilon_0$, $\epsilon_0>0$ 为某固定微小常数.

现来讨论系统(7.100)的奇点, 奇点$(x_c,\ y_c,\ z_c)$由下列方程决定:

$$\begin{cases} -x_c+ax_cy_c+uy_c+\dfrac{b}{1+z_c^\rho}(1-x_c)=0, \\ x_c-ax_cy_c-vy_c=0, \\ y_c-z_c=0. \end{cases}$$

于是有

$$y_c=x_c/(v+ax_c),$$

$$z_c^{\rho+2}-\frac{1}{a}z_c^{\rho+1}+z_c^2-\left[\frac{1}{a}+\frac{(a+v)b}{a(v-u)}\right]z_c+\frac{b}{a(v-u)}=0. \tag{7.101}$$

可以证明:

引理1(Dai[48]) 设

$$b>\max\left\{2\left[\frac{1-a}{1-(a+v)}\right](v-u),\ \frac{(a-u)(v-u)}{(a+u)(a+v)}\right\}, \tag{7.102}$$

而且 $v>u$, 则存在唯一的 $z_c\in(0,\ 1/(a+u))$满足方程(7.101), 而且当 ρ 充分大时, $z_c\in(1,\ 1/(a+u))$.

在奇点(x_c, y_c, z_c)邻域把(7.100)线性化，得线性方程，其矩阵为

$$M=\begin{bmatrix} -\left(\dfrac{vy_c}{x_c}+\dfrac{b}{1+z_c^\rho}\right) & ax_c+v & \dfrac{-\rho z_c^\rho(v-u)}{1+z_c^\rho} \\ \dfrac{vy_c}{wx_c} & \dfrac{-(ax_c+v)}{w} & 0 \\ 0 & d & -d \end{bmatrix}.$$

奇点(x_c, y_c, z_c)的稳定性，可通过研究 M 的特征方程来决定：

$$0=\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-M)=\lambda^3+A\lambda^2+B\lambda+C,$$

其中

$$A=d+\frac{vy_c}{x_c}+\frac{b}{1+z_c^\rho}+\frac{1}{w}(ax_c+u)>0,$$

$$B=d\left[\left(\frac{vy_c}{x_c}+\frac{b}{1+z_c^\rho}\right)+\frac{1}{w}(ax_c+v)\right]$$

$$+\frac{(v-u)}{w}\left(\frac{vy_c}{x_c}\right)+\frac{ax_c+v}{w}\left(\frac{b}{1+z_c^\rho}\right)>0,$$

$$C=\frac{d\rho vy_c(v-u)z_c^\rho}{wx_c(1+z_c^\rho)}+d(v-u)+\frac{d}{w}(ax_c+v)\frac{b}{1+z_c^\rho}>0.$$

$\varphi(\lambda)=0$ 的一切根具负实部的充要条件是

$$A>0,\ C>0,\ AB-C>0.$$

因 $A>0$, $C>0$ 已经成立，故(x_c, y_c, z_c)是稳定抑不稳定，视 $AB-C>0$ 或 <0 而定。

为方便起见，令

$$D=\frac{vy_c}{x_c}+\frac{b}{1+z_c^\rho}+\frac{1}{w}(ax_c+u),$$

$$E=\frac{vy_c}{x_c}+\frac{b}{1+z_c^\rho}+\frac{1}{w}(ax_c+v),$$

$$F=(v-u)\left(\frac{vy_c}{wx_c}\right)+\frac{(ax_c+v)b}{w(1+z_c^\rho)},$$

$$G=\frac{v\rho y_c(v-u)z_c^\rho}{wx_c(1+z_c^\rho)}.$$

于是

$$AB-C=(d+D)(dE+F)-d(G+F)$$
$$=d^2E+d(DE-G)+EF.$$

所以 $AB-C<0\Leftrightarrow$

$$\frac{-DE+G}{2E}-\frac{1}{E}[(DE-G)^2-4DEF]^{1/2}<d<\frac{-DE+G}{2E}$$
$$+\frac{1}{2E}[(DE-G)^2-4DEF]^{1/2}. \tag{7.103}$$

我们希望

$$-DE+G>0,$$

及

$$(DE-G)^2-4DEF\geqslant 0,$$

以保证 $d>0$，可以证明

引理 2 (Dai [48]) 设 a, b, u, v, w 满足引理 1 的条件(7.102)，令

$$\rho_0=(a+u)(v+1)[a+v+(1-a)(1+2v-2u)]/v(v-u)u.$$

又设 $\rho>\rho_0$，则 $G\geqslant DE+2(DEF)^{1/2}$，从而 $d>0$.

所以，若选取 ρ 充分大，而且 d 满足(7.103)，则 $AB-C<0$. 这表示奇点(x_c, y_c, z_c)是不稳定的.

现来找出系统(7.100)的一个正向不变集.

先选定参数 a, b, u, v，使满足(7.100)，再选取 ρ 充分大，d 满足(7.103)，于是(x_c, y_c, z_c)是相空间某区域内的唯一(不稳定)奇点. 分别令 $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$, $\dot{z}=0$，得三个曲面：

$$-x+axy+uy+\frac{b}{1+z^\rho}(1-x)=0,$$

$$x-axy-vy=0,$$

$$y-z=0.$$

$\dot{y}=0$ 决定一个通过 z 轴的柱面；$\dot{z}=0$ 决定一平面(通过 x 轴). 在 $\mathbb{R}^3_+$，$\dot{y}=0$ 所决定的柱面把 $\mathbb{R}^3_+$ 分为两区域，即 $\dot{y}>0$ 及 $\dot{y}<0$. 同样，$\dot{z}=0$ 所决定的平面把 $\mathbb{R}^3_+$ 分为两区域：$\dot{z}>0$ 与 $\dot{z}<0$. $\dot{x}=0$ 决

定一个曲面，它通过直线 $x=1$，$y=1/(a+u)$，并渐近于柱面 $h(x,\ y,\ z)=-x+axy+uy=0$(参见图 28)。$\dot{x}=0$ 所决定的曲面把 $\mathbb{R}_+^3$ 分为两区域：$\dot{x}>0$ 及 $\dot{x}<0$。

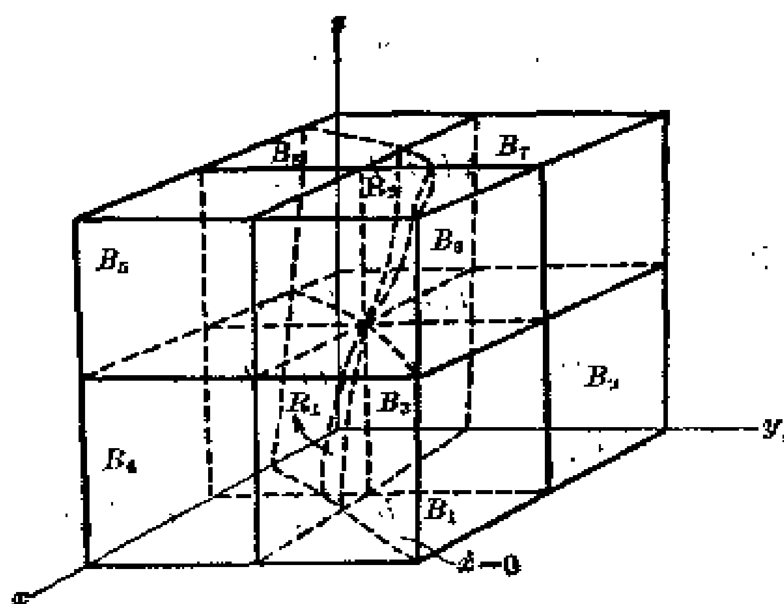


图 28

在 $\mathbb{R}_+^3$ 定义区域 B 如下：

$$B=\left\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{a+u},\ 0\leqslant z\leqslant\frac{1}{a+u}\right\}.$$

以下将证明：B 是系统(7:100)的正向不变集。由引理 1 知，$(x_0,\ y_0,\ z_0)\in B$。可以看出三个边界面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 上的向量场均指向 $\mathrm{Int}\,B$。

在边界面

$$z=\frac{1}{a+u},\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{a+u},$$

有

$$\dot{z}=y-\frac{1}{a+u}\leqslant 0.$$

在边界面 $y=\dfrac{1}{a+u}$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant\dfrac{1}{a+u}$，

有

$$\dot{y}=\frac{u}{a+u}\left(x-\frac{v}{u}\right)<0\quad\left(\text{因}\ \frac{v}{u}>1\geqslant x\right),$$

在边界面 $x=1,\ 0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{a+u},\ 0\leqslant z\leqslant\dfrac{1}{a+u},$

有 $\dot{x}=-1+(a+u)y\leqslant 0.$

任取(7.100)的一轨道 $\gamma(q)$, $q\in B$. 设 $\gamma(q)$ 与 B 的棱 $z=1/(a+u)$, $y=1/(a+u)$, $0<x<1$ 相交. 则有 $\dot{x}<0$, $\dot{y}<0$, 但 $\dot{z}=0$, 故 $\gamma(q)$不能离开 B. 同理, 若 $\gamma(q)$与棱 $x=1$, $y=1/(a+u)$, $0\leqslant z\leqslant 1/(a+u)$, 或与棱 $x=1$, $z=1/(a+u)$, $0\leqslant y\leqslant 1/(a+u)$ 相交, $\gamma(q)$亦不能离开 B.

所以 B 是系统(7.100)的正向不变集.

用平面 $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ 把 B 分为八个子区:

B_1: $x_0\leqslant x\leqslant 1$, $y_0\leqslant y\leqslant 1/(a+u)$, $0\leqslant z\leqslant z_0$;

B_2: $0\leqslant x\leqslant x_0$, $y_0\leqslant y\leqslant 1/(a+u)$, $0\leqslant z\leqslant z_0$;

B_3: $0\leqslant x\leqslant x_0$, $0\leqslant y\leqslant y_0$, $0\leqslant z\leqslant z_0$;

B_4: $x_0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant y_0$, $0\leqslant z\leqslant z_0$;

B_5: $x_0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant y_0$, $z_0\leqslant z\leqslant 1/(a+u)$;

B_6: $x_0\leqslant x\leqslant 1$, $y_0\leqslant y\leqslant 1/(a+u)$, $z_0\leqslant z\leqslant 1/(a+u)$;

B_7: $0\leqslant x\leqslant x_0$, $y_0\leqslant y\leqslant 1/(a+u)$, $z_0\leqslant z\leqslant 1/(a+u)$;

B_8: $0\leqslant x\leqslant x_0$, $0\leqslant y\leqslant y_0$, $z_0\leqslant z\leqslant 1/(a+u)$.

回顾 M 的特征方程, 设 λ_1, λ_2, λ_3 为其三根, 则 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-C<0$. 故当$(x_0, y_0, z_0)$为不稳定时, 则必有一个特征根(例如 λ_1)为负实数, 其余两个是一对共轭复数, 即 $\lambda_2=\sigma+i\sigma_2$, $\lambda_3=\sigma-i\sigma_2$, $\sigma>0$. 所以存在一维流形 S, 使得(7.100)任一与 S 相交的轨道, 当 $t\to\infty$ 时, 趋于奇点. 对应于 $\lambda_1<0$ 的特征向量有下列性质:

引理 3 (Dai [48]) 设(X, Y, Z)是对应于 $\lambda_1<0$ 的特征向量, 则(X, Y, Z)必指入 B_5 或 B_2.

以下讨论(7.100)的轨道 γ 在 B 内的行为. 我们有

引理 4(Dai[48]) 关于 B_2 及 B_5, 有下列事实成立:

(甲)除却与稳定流形相交的轨道外, 没有轨道能永远留在 B_2

或 B_5 内；

(乙)有一条轨道自 B_5 出发趋于奇点，另一条则自 B_2 出发趋于奇点；

(丙) B 内出发的任一轨道皆不能进入 B_2 或 B_5.

证明 记 B_i 与 B_j 之间的界面为 F_{ij}. 设 $q\in B_5\setminus\{(x_0, y_0, z_0)\}$; $\gamma(q)$ 仅能穿过下列界面之一离开 B_5:

F_{54}: $z=z_0,\ x_0<x<1,\ 0<y<y_0$;

F_{56}: $y=y_0,\ x_0<x<1,\ z_0<z<1/(a+u)$;

F_{58}: $x=x_0,\ 0<y<y_0,\ z_0<z<1/(a+u)$.

在 F_{54}，因 $z>y$，故 $\dot z=y-z<0$. 所以 $\gamma(q)$ 穿过它进入 B_4. 在 F_{56}，$\dot y=x(1-ay_0)-vy_0>0$，故 $\gamma(q)$ 进入 B_6. 在 F_{58}，可以证明 $\dot x<0$. 事实上，令

$$f(x,\ y,\ z)=-x+axy+uy+\frac{b}{1+z^{\rho}}(1-x).$$

因为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=x_0}=ax_0+u>0,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x=x_0}=-\frac{\rho b z^{\rho-1}}{(1+z^{\rho})^2}(1-x_0)<0,$$

故有

$$f(x_0,\ y,\ z_0)<0,\ y\in(0,\ y_0),$$

$$f(x_0,\ y_0,\ z)<0,\ z\in(z_0,\ 1/(a+u)).$$

所以 $f(x_0,\ y,\ z)<0$, $y\in(0,\ y_0)$, $z\in(z_0,\ 1/(a+u))$，即 $\dot x<0$ (在 F_{58}).

如果 $\gamma(q)$ 与下列任一线段相交

$S_1=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3\,|\,0\leqslant y<y_0,\ x=x_0,\ z=z_0\}$,

$S_2=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3\,|\,z_0<z\leqslant 1/(a+u),\ x=x_0,\ y=y_0\}$,

$S_3=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x_0<x\leqslant 1,\ y=y_0,\ z=z_0\}$,

则 $\gamma(q)$ 必离开 B_5. 事实上，若 $\gamma(q)$ 与 S_1 相交，则有

$$\dot x<0,\ \dot y>0,\ \dot z<0.$$

故 $\gamma(q)$ 进入 B_8. 若 $\gamma(q)$ 与 S_2 相交，则有

$$\dot{x}<0,\ \dot{z}<0,\ \dot{y}=0.$$

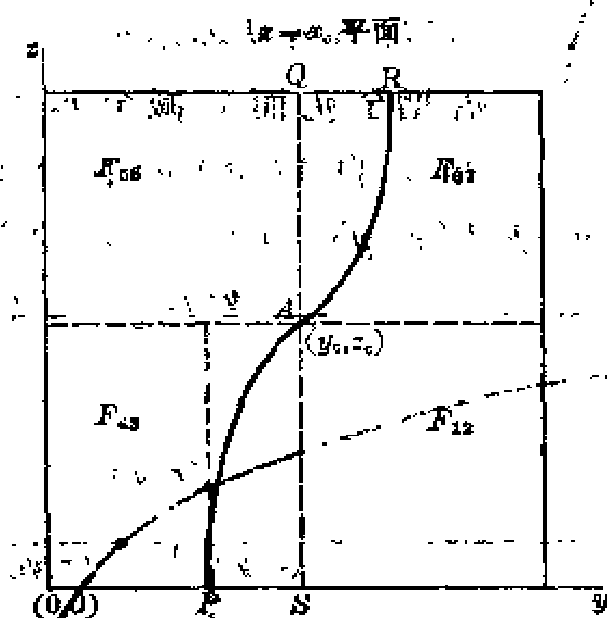
所以 $\gamma(q)$ 离开 B_5. 若 $\gamma(q)$ 与 S_3 相交, 则有

$$\dot{x}<0,\ \dot{y}>0,\ \dot{z}=0.$$

故 $\gamma(q)$ 亦离开 B_5.

最后, 考虑 $\gamma(q)$ 逗留在 B_5 的情形. 由于在 B_5 内, $\dot{x}<0$, $\dot{y}>0$, $\dot{z}<0$, 故当 $t\to\infty$, $\gamma(q)$ 必趋于奇点. 同理可证, B_2 亦有类似结论. ∎

为了进一步研究 $\gamma(q)$ 的行为, 先讨论由 $\dot{x}=0$ 决定的曲面的特点. 首先证明: 此曲面落在区域 $B_3\cup B_8\cup B_7\cup B_4\cup B_1\cup B_6$ 之内; 然后证明: 此曲面与 $x=x_c$ 交于图 29 所示的曲线, 与 $y=y_c$ 交于图 30 所示的曲线.



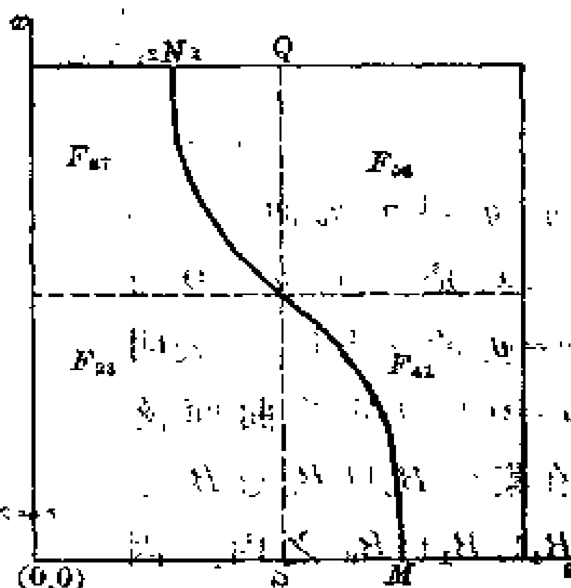
PR 是 $\dot{x}=0$ 与 $x=x_c$ 的交线

$A=(x_c,\ y_c,\ z_c)$

$Q=\left(x_c,\ y_c,\ \dfrac{1}{a+u}\right)$

$S=(x_c,\ y_c,\ 0)$

图 29



MN 是 $\dot{x}=0$ 与 $y=y_c$ 的交线

$A=(x_c,\ y_c,\ z_c)$

$Q=\left(x_c,\ y_c,\ \dfrac{1}{a+u}\right)$

$S=(x_c,\ y_c,\ 0)$

图 30

选定 $z_1\in[0,\ 1/(a+u)]$, 考虑 $\dot{x}=0$ 与 $z=z_1$ 的交线; 当 $z_1=0$ 时, 有

$$-x+axy+uy+b(1-x)=0.$$

当 $z_1>0$ 时，此交线为

$$L(x,\ y)=-x+axy+uy+\frac{b}{1+z_1^2}(1-x)=0.$$

分三种情形讨论：

情形 I. $0<z_1<z_0$，$L(x,y)=0$ 的图形见图 31.

情形 II. $z_0<z_1<1/(a+u)$. $L(x,\ y)=0$ 的图形见图 32.

情形 III. $z_1=z_0$. $L(x,y)=0$ 的图形见图 33.

所以，当 z_1 从零增至 z_0 时，y_1 增至 y_0 而 x_1 减至 x_0. 但当 z_1 自 $1/(a+u)$ 减至 z_0 时，y_1 减至 y_0 而 x_1 增至 x_0 [这里 y_1 是 $L(x,\ y)=0$ 与 $x=x_0$ 的交点，x_1 是 $L(x,\ y)=0$ 与 $y=y_0$ 的交点]. 这表明 $\dot{x}=0$ 所决定的曲面落在集合 $B_5\cup B_8\cup B_7\cup B_4\cup B_1\cup B_6$ 之内. 因 B_5 位在 $z\geqslant z_0$ 之内，B_2 位在 $z\leqslant z_0$ 之内，故 $\dot{x}=0$ 所决定的曲面与 B_5 或 B_2 不相交(奇点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 除外). $\dot{x}=0$ 所决定的曲面与 $x=x_0$ 的交线是曲线 PR.

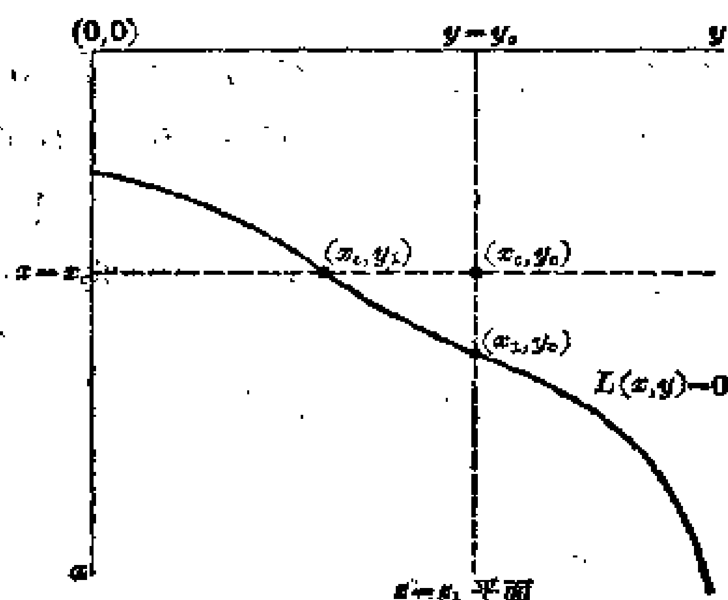


图 31

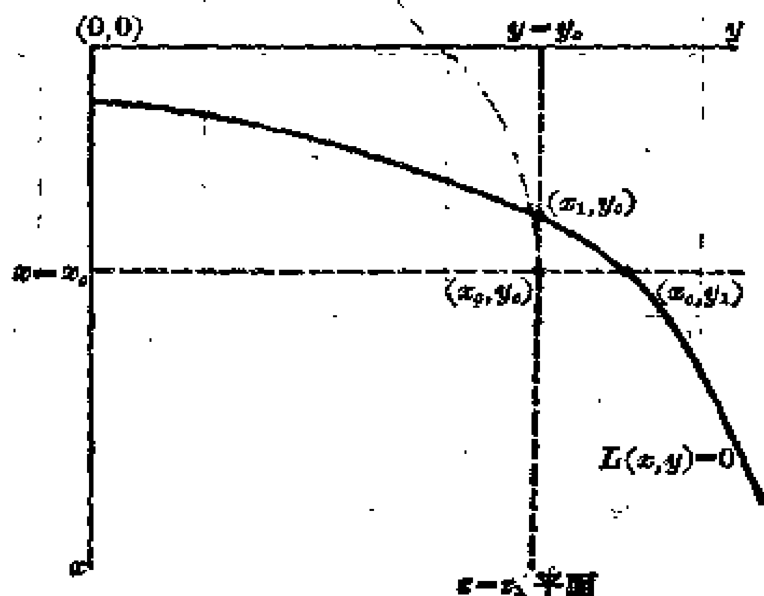


图 32

$$PR:\ -x_0+ax_0y+uy+\frac{b}{1+z^2}(1-x_0)=0.$$

因 $x_0/(ax_0+u)>(x_0+b(x_0-1))/(ax_0+u)$，此曲线自 $y=(x_0+b(x_0-1))/(ax_0+u)$ 出发，上升至点(y_0,z_0)，然后再上升，趋向渐近线 $y=x_0/(ax_0+u)$，其草图见图 29.

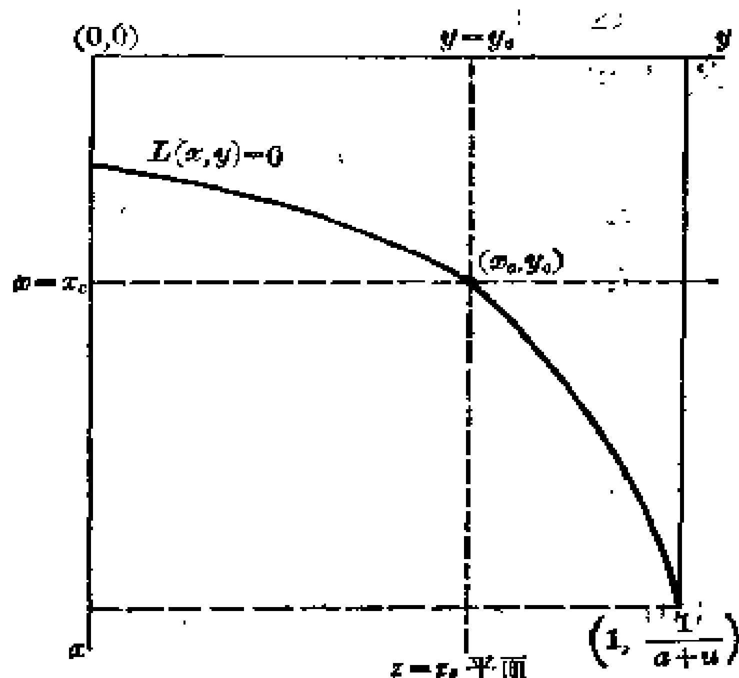


图 33

$\dot{x}=0$ 所决定的曲面与 $y=y_0$ 的交线是曲线 MN.

MN: $-x+axy_0+uy_0+\frac{b}{1+z^p}(1-x)=0$.

此曲线有渐近线 $x=uy_0/(1-ay_0)$. 因 $uy_0/(1-ay_0)=ux_0/v<u/v<1$，故$(b+uy_0)/(1+b-ay_0)>b/(1-ay_0)$. 此曲线自 $x=(b+uy_0)/(1+b-ay_0)$出发，然后上升(当 x 减少时)，通过点(x_0, y_0, z_0)，再上升，趋向渐近线 $x=uy_0/(1-ay_0)$. 此渐近线位在界面 $F_{37}\cup F_{23}$，见图 30.

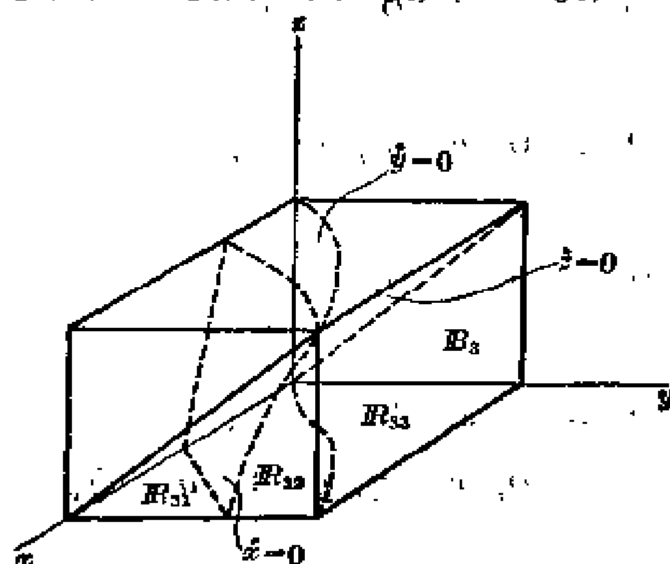


图 34 $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$ 及 $\dot{z}=0$ 这三个曲面与子区 B_3 相交之情形

由此可见，$\dot{x}=0$ 所决定的曲面与平面 $x=x_0$ 及 $y=y_0$ 围起两个区域：

$$R_1=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 | x_0\leqslant x\leqslant 1, y\leqslant y_0, 0\leqslant z\leqslant z_0, \dot{x}\geqslant 0\},$$

$$R_2=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 | x\leqslant x_0, y\geqslant y_0, z_0\leqslant z\leqslant 1/(a+u), \dot{x}\leqslant 0\}.$$

$R_1\subset B_4$, $R_2\subset B_7$.

为了研究在 B_3（或 B_6）内的轨道，我们要考察由 $\dot{x}=0$，$\dot{y}=0$，$\dot{z}=0$ 这三个曲面所分划出来的区域．由对称性，仅需考虑 B_3 或 B_6 即可．

在 B_3，有六个子区域（参考图 34）：

$R_{31}=\{(x,\ y,\ z)\in B_3\,|\,\dot{x}\leqslant 0,\ \dot{z}\geqslant 0,\ x\leqslant x_c,\ z\geqslant 0\}$；

$R_{32}=\{(x,\ y,\ z)\in B_3\,|\,\dot{x}\geqslant 0,\ \dot{z}\geqslant 0,\ x\leqslant x_c,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant c\}$；

$R_{33}=\{(x,\ y,\ z)\in B_3\,|\,\dot{z}\geqslant 0,\ \dot{y}\leqslant 0,\ y\leqslant y_c,\ x\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$；

$R_{34}=\{(x,\ y,\ z)\in B_3\,|\,\dot{x}\leqslant 0,\ \dot{z}\leqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x\leqslant x_c,\ z\leqslant z_c\}$；

$R_{35}=\{(x,\ y,\ z)\in B_3\,|\,\dot{x}\geqslant 0,\ \dot{z}\leqslant 0,\ \dot{y}\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\leqslant z_c\}$；

$R_{36}=\{(x,\ y,\ z)\in B_3\,|\,\dot{y}\leqslant 0,\ \dot{z}\leqslant 0,\ x\geqslant 0,\ z\leqslant z_c\}$．

其中 R_{31}，R_{32}，R_{33} 位在 $\dot{z}=c$ 之下；R_{34}，R_{35}，R_{36} 则在 $\dot{z}=0$ 之上．

同样，在 B_6 内有

$R_{61}=\{(x,\ y,\ z)\in B_6\,|\,\dot{x}\geqslant 0,\ \dot{z}\leqslant 0,\ x\geqslant x_c,\ z\leqslant 1/(a+u)\}$；

$R_{62}=\{(x,\ y,\ z)\in B_6\,|\,\dot{x}\leqslant 0,\ \dot{z}\leqslant 0,\ \dot{y}\leqslant 0,\ x\geqslant x_c,$
$z\leqslant 1/(a+u)\}$；

$R_{63}=\{(x,\ y,\ z)\in B_6\,|\,\dot{y}\geqslant 0,\ \dot{z}\leqslant 0,\ y\geqslant y_c,\ x\leqslant 1,$
$z\leqslant 1/(a+u)\}$；

$R_{64}=\{(x,\ y,\ z)\in B_6\,|\,\dot{x}\leqslant 0,\ \dot{z}\geqslant 0,\ \dot{y}\geqslant 0,\ x\leqslant 1,$
$z\leqslant 1/(a+u)\}$；

$R_{65}=\{(x,\ y,\ z)\in B_6\,|\,\dot{y}\leqslant 0,\ \dot{z}\geqslant 0,\ x\leqslant 1,\ z\geqslant z_c\}$；

$R_{66}=\{(x,\ y,\ z)\in B_6\,|\,\dot{x}\geqslant 0,\ \dot{z}\geqslant 0,\ x\geqslant x_c,\ y\leqslant 1/(a+u),$
$z\geqslant z_c\}$．

这里，R_{61}，R_{62}，R_{63} 位在 $\dot{z}=0$ 之上；R_{64}，R_{65}，R_{66} 位在 $\dot{z}=0$ 之下．

于是有下面关键性的引理．

引理 5（Dai[48]）　B_3（或 B_6）中的一切轨道必进入区域 R_{32}（或 R_{62}），然后经过扇形区 APS（或 AQR）离开 R_{32}（或 R_{62}）而进入 R_1（或 R_2）．（参考图 34 及 29.）

证明 (甲)先证明 $\gamma(q)$, $q\in R_{32}$ 只可能穿过 $\dot{x}=0$ 进入 R_{31}; (乙)再证明自 R_{31}, R_{33}, R_{34}, R_{35}, R_{36} 出发的轨道必进入 R_{32}, 从而有下列可能性:

$$R_{34}\to R_{35}\to R_{33},$$

$$R_{34}\to R_{31}\to R_{33},$$

$$R_{36}\to R_{35}\to R_{32},$$

$$R_{36}\to R_{33}\to R_{32},$$

$$R_{31}\rightleftarrows R_{32}\to R_1.$$

先讨论(甲).

任取 $q\in R_{32}$, 考虑轨道 $\gamma(q)$.

$\gamma(q)$不能穿过 $\dot{z}=0$ 上升入 $\dot{z}<0$ 这区域. 事实上, 如果是这样, 则有 $\ddot{z}=d\dot{y}>0$, 从而 $\gamma(q)$穿过 $\dot{z}=0$ 后有 $\dot{z}>0$, 矛盾.

$\gamma(q)$不能穿过曲线 $\dot{z}=0$, $\dot{y}=0$ 离开R_{32}. 事实上, 若然, 则有 $\ddot{z}=0$, $\dddot{z}=d\ddot{y}=d\dot{x}(1-ay)>0$, 故穿过 $\dot{z}=0$, $\dot{y}=0$ 后有 $\dddot{z}>0(\Rightarrow\dot{z}>0)$, 矛盾.

$\gamma(q)$不能穿过曲面 $\dot{y}=0$ 离开 R_{32}. 事实上, 若然, 则 $\ddot{y}=\dot{x}(1-ay)>0(\Rightarrow\gamma(q)$ 与 $\dot{y}=0$ 相交后, $\dot{y}>0)$, 这与 $\dot{y}<0$ 相矛盾.

$\gamma(q)$不能穿过曲线 $\dot{x}=0$, $\dot{z}=0$ 而进入区域 R_{34} 或 R_{35}. 事实上, 我们有 $\ddot{x}=(ax+u)\dot{y}>0(\Rightarrow\dot{x}>0)$, 这与 R_{34} 或 R_{35} 中 $\dot{x}<0$ 相矛盾.

所以, 只存在一个可能性, 即 $\gamma(q)$穿过 $\dot{x}=0$ 进入 R_{31}.

现来讨论(乙).

设 $\gamma(q)$, $q\in R_{31}$, $\gamma(q)$ 不能穿过 $\dot{z}=0$. 再有, 由于 $\dot{x}<0$, 一旦 $\gamma(q)$穿过 $x=x_0$ 后, 不能返回再与 $x=x_0$ 相交. 因此, $\gamma(q)$必进入 R_{32}. 否则 $\gamma(q)$在 $\dot{z}=0$ 之下振动, 而这意味着当 $t\to\infty$, $z(t)$ 有一极限点(在 $\dot{z}=0$ 之下, $\dot{z}(t)>0$); 另外, 因 $\dot{y}>0$, 故 $\gamma(q)$ 在 B_3 内趋于奇点, 这与引理 4 相矛盾. 同理可见, $\gamma(q)$不能在 R_{31} 与 R_{32} 之间无限次振动. 再注意及在扇形区 APS, $\dot{x}>0$, 所以

R_{32} 内的轨道必穿过扇形区 APS 进入区域 R_1.

任取 $q\in R_{34}$，考虑轨道 $\gamma(q)$，则或者 $\gamma(q)$ 穿过 $\dot{z}=0$ 进入 R_{31}，或者 $\gamma(q)$ 穿过 $\dot{x}=0$ 进入 R_{35}.

注意此时 $\gamma(q)$ 不能穿过 $\dot{y}=0$ 进入 R_{36}. 事实上，$\dot{y}=0\Rightarrow\ddot{y}=\dot{x}(1-ay)>0\Rightarrow\gamma(q)$ 与 $\dot{y}=0$ 相交后，$\dot{y}>0$；可是在 R_{36} 内 $\dot{y}<0$. 再有，$\gamma(q)$ 如进入 R_{35} 后，不能再与 $\dot{x}=0$ 相交. 事实上，这时有 $\ddot{x}=(ax+u)\dot{y}-\rho bz^{\rho-1}\dot{z}(1-x)/(1+z^\rho)^2>0$(因 $\dot{z}<0$)，而这表明了 $\gamma(q)$ 与 $\dot{x}=0$ 相交后必有 $\dot{x}>0$；可是在 R_{34} 内 $\dot{x}<0$. 再注意到 R_{35} 的定义，结合上述可得结论，$\forall q\in R_{34}$，$\gamma(q)$ 必向下走，穿过 $\dot{z}=0$ 进入 R_{32}.

考虑 $\gamma(q)$，$q\in R_{36}$，则它可能穿过 $\dot{y}=0$ 进入 R_{35}，或可能穿过 $\dot{z}=0$ 进入 R_{33}. 但是，若 $\gamma(q)$ 进入了 R_{33}，则因 $\gamma(q)$ 既不能穿过 $\dot{z}=0$ 向上跑，亦不能穿过界面 F_{32} 进入 B_2，故 $\gamma(q)$ 最终必进入 R_{32}.

总结上述，可得 $\gamma(q)$，$q\in B_3$ 有下列可能路径：

$$R_{34}\rightarrow R_{35}\rightarrow R_{32},$$

$$R_{34}\rightarrow R_{31}\rightarrow R_{32},$$

$$R_{36}\rightarrow R_{35}\rightarrow R_{32},$$

$$R_{36}\rightarrow R_{33}\rightarrow R_{32},$$

$$R_{31}\rightleftarrows R_{32}\rightarrow R_1.$$

同理可证，对于 $\gamma(q)$，$q\in B_6$，有下列可能路径：

$$R_{65}\rightarrow R_{63}\rightarrow R_{62},$$

$$R_{65}\rightarrow R_{64}\rightarrow R_{62},$$

$$R_{66}\rightarrow R_{61}\rightarrow R_{62},$$

$$R_{66}\rightarrow R_{64}\rightarrow R_{62},$$

$$R_{61}\rightleftarrows R_{62}\rightarrow R_2.$$

引理得证. ∎

余下要讨论的是 B_1, B_3, B_4, B_7 诸子区中的轨道的行为.

关于 B_1(或 B_8)，情况较简单．曲面 $\dot{x}=0$ 及 $\dot{y}=0$ 把 B_1(或 B_8)分为四部分．平面 $\dot{z}=0$ 与 B_1(或 B_8)不相交，故在这两区内，或者 $\dot{z}>0$，或者 $\dot{z}<0$．这表明 B_1 中的 γ 必上升进入 B_6，而 B_8 中的 γ 必下降进入 B_3．

关于 B_4(或 B_7)．$\dot{x}=0$ 和 $\dot{z}=0$ 把它分为三个子区．特别地，$R_1\subset B_4$ 而 $R_2\subset B_7$．我们运用上述的推理可证：

引理 6(Dai[48]) $\gamma(q)$，$q\in R_1$(或 R_2)必离开 R_1(或 R_2)穿过 $y=y_c$ 进入 B_1(或 B_8)．

结合上述各引理，在 B 内的轨道(组成稳定流形的那两条除外)皆按下列顺序在 B 内振动：

$$\underline{B_3\to R_{32}\to R_1\subset B_4}\to B_1\to \underline{B_6\to R_{62}\to R_2\subset B_7}\to B_8\to B_3 \tag{7.104}$$

而且，因 γ 不能无限次地循小回路振动，故它必重复地穿过界面 F_{16}．

命题 7.18(Dai[48]) 设引理 1 及引理 2 的假设条件成立，则系统(7.100)至少存在一周期轨道．

证明 方法与 Hastings-Murray[47] 相仿，现仅介绍其要点．

考虑轨道 $\gamma(\tau)=(x(\tau),\ y(\tau),\ z(\tau))$，其中 $x(0)\in[x_c,\ 1]$，$y(0)\in[y_c,\ 1/(a+u)]$，$z(0)=z_c$，故 $\gamma(0)=\gamma_0\in F=F_{16}$($B_1$ 与 B_6 之间的界面)．于是，当 $\gamma(0)\neq(x_c,\ y_c,\ z_c)$，存在 $\hat{T}=\min\{T\,|\,T>0,\ \gamma(T)\in F\}$．于是有连续映射 $P:F\to F$

$$P(\gamma(0))=\gamma(\hat{T}),\quad 当\ \gamma(0)\neq(x_c,\ y_c,\ z_c),$$
$$P(\gamma_c)=\gamma_c,\ \gamma_c=(x_c,\ y_c,\ z_c).$$

事实上，$\hat{T}$ 是由下方程决定的：

$$z(\hat{T},\ \gamma_0)=z_c,$$

再有，除却 $y=y_c$，$z=z_c$，$x_c<x<1$ 这棱以外，$\dot{z}(\hat{T})>0$．在此棱，有 $\ddot{z}>0$，故与此棱相交之前，$z>z_c$，而这种轨道必是来自 B_5 的．

可是，从 F 出发的轨道不能进入 B_5。所以上述 Poincaré 映射不与棱 $y=y_c$，$z=z_c$，$x_c<x<1$ 相交，即轨道在 $z(\hat{T}, \gamma_0)$ 不与 F 相切。由隐函数定理知，$\hat{T}(\gamma_0)$ 是连续的。γ_c 是此映射 P 的一个不动点，其它不动点则对应于系统(7.100)的一个周期轨道。

为了证明映射 P 存在其它不动点，我们证明存在光滑曲线 $h\subset F$，使具备下列性质：

（甲）$\gamma_c\notin h$；

（乙）h 的端点，一在 $x=x_c$，另一在 $y=y_c$，h 的其余部分全在 F 内；

（丙）h 把 F 分为两区域，其中 G 是不含 γ_c 的，而且 $P: G\to G$。

对 $P: G\to G$ 应用 Brouwer 不动点定理即得周期轨道的存在性。 ∎

7.4.7 描写生物化学 Michaelis-Menten 机制的三维动力系统的极限环唯一性

Dai[48] 还讨论了上节的三维动力系统(7.100)的极限环唯一性和稳定性，所用方法雷同于 Hastings [109]；考虑

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau}=-x+axy+uy+\dfrac{b}{1+z^p}(1-x), \\ w\dfrac{dy}{d\tau}=x-axy-vy, \\ \dfrac{dz}{d\tau}=dy-dz, \end{cases} \tag{7.100}$$

其中 a, u 是小参数。

现在勾画其证明方法，略去一些冗长的初等推导，详细情形可参考[48, 109]及[48]所列文献。

令 $a=u=0$，(7.100)变为

$$\begin{cases} \dot{x}=-x+b(1-x)/(1+z^p), \\ w\dot{y}=x-vy, \\ \dot{z}=d(y-z). \end{cases} \tag{7.105}$$

可以证明，若 $b>2v/(1-v)$，$\rho\geqslant 1$，则系统(7.105)在集合

$$B=\left\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{v},\quad 0\leqslant z\leqslant\frac{1}{v}\right\}$$

内存在唯一的奇点；又当 ρ 充分大时，此奇点是不稳定的．利用此集合 B，运用类似于 **7.4.6** 中讨论系统(7.100)的周期轨道存在性的方法，可证系统(7.105)存在周期轨道．

在此基础上，作下列两步：

(一)证明(7.105)的周期轨道是唯一的和渐近稳定的；

(二)在上一步的基础上，利用下列定理推出所求结果(命题7.19)：

定理(参见 Hale[5]) 考虑动力系统 $\dot{x}=f(x)+F(x,\ \varepsilon)$，其中 $f(x)$，$F(x,\ \varepsilon)\in C^1$，$F(x,\ 0)=0$．若 $\dot{x}=f(x)$ 存在周期解，其 $(n-1)$ 个 Floquet 指数皆小于 1，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对一切 $\varepsilon\in[0,\ \varepsilon_0]$，上述系统存在唯一的、渐近稳定周期解．

于是便推出

命题 7.19(Dai[48]) 设系统(7.100)中的参数满足下列条件：

1° $b>\max\left\{2\left[\dfrac{1-a}{1-(a+v)}(v-u),\ \dfrac{(a-u)(v-u)}{(a+u)(a+v)}\right]\right\}$；

2° $b>\dfrac{2v}{1-v}$；

3° $E<d<bw/v(1+v)$，其中 $E=\dfrac{vy_0}{x_0}+\dfrac{b}{1+z_0^2}+\dfrac{ax_0+v}{w}$；

4° ρ, b, d, w, v 满足：ρ 充分大，$|b-b^*|+|d-d^*|+|v-v^*|+|w-w^*|<\varepsilon$，这里 b^*，d^*，v^*，w^* 皆正，且 $d^*=b^*w^*/2v^*$；

5° a，u 充分小

则(7.100)在 $\mathbb{R}_+^3$ 内存在唯一的、渐近稳定周期轨道．

现对第(一)步作进一步说明．

为了证明系统(7.105)的周期轨道唯一和渐近稳定，引入下列系统：

$$\begin{cases} \dot{x}=-x+b(1-x)H(1-z), \\ w\dot{y}=x-vy, \\ \dot{z}=d(y-z), \end{cases} \tag{7.106}$$

其中 $H(\sigma)$是 Heaviside 函数, 即

$$H(\sigma)=\begin{cases} 1, & \sigma\leqslant 0, \\ 0, & \sigma>0. \end{cases}$$

系统(7.106)是不连续系统, 由两系统组成, 如引入坐标变换 $\bar{x}=x$, $\bar{y}=wy$, $\bar{z}=(w/d)z$, 分别代入(7.106)的两部分, 然后去掉"—"号, 即得

$$\begin{cases} \dot{x}=-x, \\ \dot{y}=x-\dfrac{v}{w}y, \quad z\geqslant 1, \\ \dot{z}=y-dz \end{cases} \tag{7.107}$$

和

$$\begin{cases} \dot{x}=b\left(1-\dfrac{1+b}{b}x\right), \\ \dot{y}=x-\dfrac{v}{w}y, \qquad 0<z<1 \\ \dot{z}=y-dz. \end{cases} \tag{7.108}$$

利用(7.107)及(7.108)可以推出(7.106)之相图轮廓. 当 $bw/dv\cdot(1+b)>1$时, (7.106)在$\mathbb{R}^3_+$的轨道必进入并停留在下列区域内:

$$\left\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0<x<1, \ 0<y<\frac{1}{v}, \ 0<z<\frac{1}{v}\right\}.$$

若 $z(0)>1$, $x(0)$, $y(0)>0$, 则轨道循(7.107)的轨道前进, 最终与 $z=1$ 相交, 这时有 $0<y\leqslant 1$; 若此时恰巧 $x=v$, $y=1$, 则不能往前推进; 否则便转换到(7.108)的轨道上, 最后又与 $z=1$ 相交, 此时有 $v<x<1$, $1<y<x/v$. 图 35 示出这种转换点的一个部分序列.

这些转换点交替地在区域$\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 | v<x<1, \ 1<y<x/v\}$与 $\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 | 0<x<v, \ x/v<y<1\}$ 内出现(可能第一点除外); 而且仅有两轨道(一自 $z>1$ 出发, 另一自 $z<1$ 出发)不按此方式

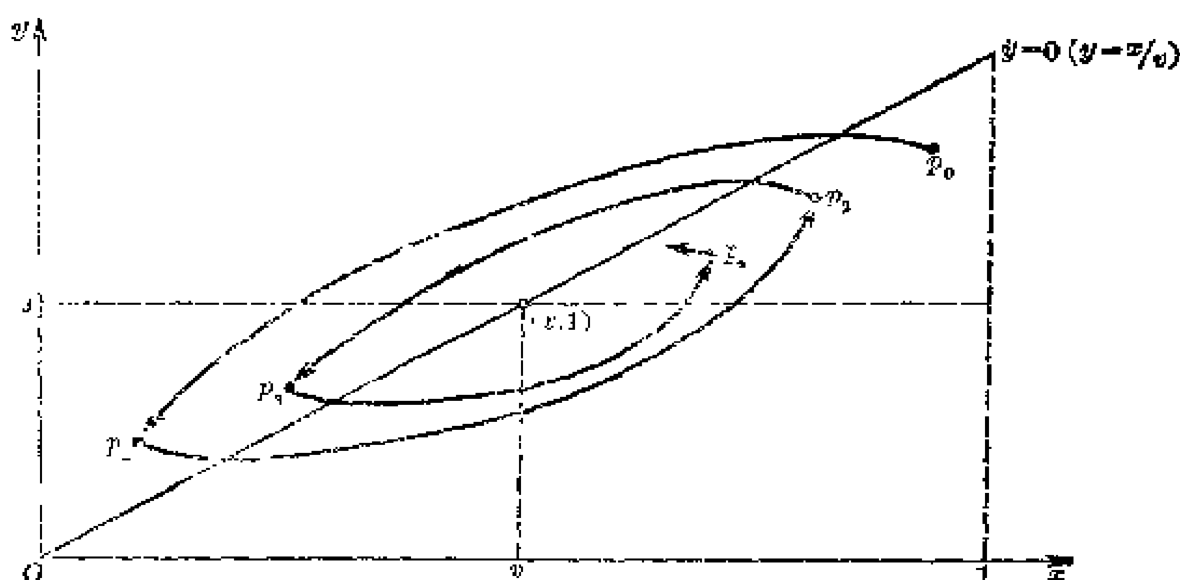


图 35

转换.

设 $(x(t),\ y(t),\ z(t))$ 是系统(7.106)的解, 其初始条件为 $(x(0),\ y(0),\ z(0))=(x_0,\ y_0,\ 1)$, $0<x_0<1$, $0<y_0<\frac{1}{v}$, $(x_0,\ y_0)\neq(dv/w,\ d)$. 定义 $(x_1,\ y_1)=\mathscr{A}(x_0,\ y_0)$ 为解 $(x(t),\ y(t), z(t))$ 的下一个转换点, 于是 $(x_1,\ y_1)\neq(x_0,\ y_0)$. 若 $v<x_0<1$, $1<y_0<x_0/v$, 则 $0<x_1<v$, $x_1/v<y<1$. 考虑 Poincaré 映射 $\mathscr{B}=\mathscr{A}^2$: $M\to M$, 其中

$$M=\left\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,v<x<\frac{b}{1+b},\ \ 1<y<\frac{x}{v},\ \ z=1\right\}.$$

可以证明: 若 $\mathscr{B}(x_i,\ y_i)=(x_{i+2},\ y_{i+2})$, 则序列 $\{x_{2j}\}$, $\{y_{2j}\}$ 都是单调、有界的, 从而 $\lim\limits_{j\to\infty}(x_{2j},\ y_{2j})=p^*$ 存在, 这时 p^* 或者是 $(dv/w,\ d,\ 1)$, 或者是一周期解上的转换点. 于是有

命题 7.20 设 $bw/dv(1+b)>1$, 则系统(7.106)在 $\mathbb{R}^3_+$ 的任一轨道或者趋于某周期轨道, 或者趋于 $(dv/w,\ d,\ 1)$.

如果选取 $d=d^*>0$, $b=b^*>0$, $w=w^*>0$, $v=v^*>0$ 而且满足关系: $d^*=b^*w^*/2v^*$, 则可证上述 Poincaré 映射有唯一的不动点 $(x_0^*,\ y_0^*)$, 而且对于任一 $(x_0,\ y_0)\in\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\,|\,v<x<b(1+$

$b), 1<y<1/v\}$，均有

$$\lim_{n\to\infty}\mathscr{B}^n(x_0, y_0)=(x_0^*, y_0^*).$$

从而有

命题 7.21 设 $b=b^*>0$，$d=d^*>0$，$v=v^*>0$，$w=w^*>0$，而且 $d^*=b^*w^*/2v^*$，$b^*w^*/d^*v^*(1+b^*)>1$，则系统(7.106)在 $\mathbb{R}_+^3$ 存在唯一的周期轨道. 有两条轨道趋于 $(dv/w, d, 1)$；此外，其它轨道趋于此周期轨道(当 $t\to\infty$).

以上是关于系统(7.106)的结果，现利用此结果探讨系统(7.105)，推出(7.105)在一定条件下亦存在唯一的周期轨道(渐近稳定). 办法是研究系统(7.106)及系统(7.105)的 Poincaré 映射的相互关系.

令 $q=1/\rho$，对每个 $q>0$，设

$$U_c(q)=(x_c(q), y_c(q), z_c(q))$$

是系统(7.105)在 $\mathbb{R}_+^3$ 内的唯一奇点. 于是 $z_c(q)$ 满足

$$z^{\rho+1}+(1+b)z=\frac{b}{v},$$

由此可推出：当 $q\to0$，$z_c(q)\to0$；从而亦有 $q\to0$ 时，$y_c(q)\to1$，$x_c(q)\to v$.

先确定系统(7.105)的 Poincaré 映射.

考虑集合

$$\hat{R}^q=\Big\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x=x_c(q),\ y_c(q)\leqslant y\leqslant\frac{1}{v},$$
$$z_c(q)\leqslant z\leqslant\frac{1}{v},\ (y, z)\neq(y_c(q), z_c(q))\Big\}.$$

当 q 微小时，系统(7.105)在 $\mathbb{R}_+^3$ 的轨道(除位在 $U_c(q)$ 的一维稳定流形上的轨道以外)必将与 $\hat{R}^q$ 相交(无切地)；这些轨道定义了微分同胚 $\hat{\Pi}^q$: $\hat{R}^q\to\hat{R}^q$，具体描述如下：

设 $U(t)=U(t, y_0, z_0)$ 是系统(7.105)的解，且 $U(0)=(x_c(q), y_0, z_0)$，$U(0)\in\hat{R}^q$，则存在第一个 $T_q=T_q(y_0, z_0)>0$，使得 $U(T_q)$

$\in \hat{R}^q$. 令

$$\hat{\Pi}^q(x_0(q), y_0, z_0)=U(T_q(y_0, z_0), y_0, z_0),$$

是为上述之微分同胚 $\hat{\Pi}^q$: $\hat{R}^q \to \hat{R}^q$.

设 R^q 是 $\hat{R}^q$ 在(y, z)平面上的垂直投影, 设 Π^q 是 $\hat{\Pi}^q$ 所诱导的映射, Π^q: $R^q \to R^q$. 可把 Π^q 表成四个映射的复合: 首先循系统(7.105)的轨道由 R^q 映到平面 $z=z_0(q)$上; 其次, 循(7.105)轨道映到集合

$$\hat{S}^q=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 | x=x_0(q),\ 0\leqslant y\leqslant y_0(q),$$
$$0\leqslant z\leqslant z_0(q),\ (y, z)\neq(y_0(q), z_0(q))\};$$

然后沿(7.105)轨道映到平面 $z=z_0(q)$; 最后沿(7.105)轨道映回 $\hat{R}^q$. 于是 $\Pi^q=\Pi_3^q\circ\Pi_3^q\circ\Pi_2^q\circ\Pi_1^q$, 其中 Π_1^q: $R^q\to R_1^q$, 其中 $R_1^q=\{(x, y, 0)\in\mathbb{R}^3 | 0\leqslant x\leqslant x_0(q),\ 0\leqslant y\leqslant y_0(q)\}$; Π_2^q: $R_1^q\to R_2^q$, 其中 $R_2^q=\{(0, y, z)\in\mathbb{R}^3 | 0\leqslant y\leqslant y_0(q),\ 0\leqslant z\leqslant z_0(q)\}$; Π_3^q: $R_2^q\to R_3^q$, 其中 $R_3^q=\left\{(x, y, 0)\in\mathbb{R}^3 | x_0(q)\leqslant x\leqslant 1,\ y_0(q)\leqslant y\leqslant \frac{1}{v}\right\}$; Π_4^q: $R_3^q\to R^q$. 所有这些集合和映射皆可推广到 $q=0$ 的情形, 这时是针对系统(7.106)来定义的.

于是, Π^q 表示相对于(7.105)的 Poincaré 映射; Π^0 是相对于(7.106)的 Poincaré 映射. 注意及上面研究过的映射 $\mathscr{B}$: $M\to M$, $M=\left\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 | v<x<\frac{b}{1+b},\ 1<y<\frac{x}{v},\ z=1\right\}$, 就是映射

$$P=\Pi_3^0\circ\Pi_2^0\circ\Pi_1^0\circ\Pi_4^0$$

在 M 上的限制. 已证, 当 $d=d^*$, $b=b^*$, $v=v^*$, $w=w^*$, 且 $d^*=b^*w^*/2v^*$ 时, 则

1° P 有唯一不动点(x_0^*, y_0^*), 而且

2° 对任意 $(x_0, y_0)\in\left\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 | v<x<\frac{b}{1+b},\ 1<y<\frac{1}{v}\right\}$,

有

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x_0, y_0) = (x_0^*, y_0^*).$$

这表示映射 Π^0 亦有唯一不动点 (y_0^*, z_0^*)，而且对任意 $(y, z)\in R^0$，$\lim_{n\to\infty} (\Pi^0)^n(y, z) = (y_0^*, z_0^*)$.

剩下要证的是：

若 (y, z)，$(y_0^*, z_0^*)\in R^q\backslash V$，$V$ 是点 $(1, 1)$ 的某已知邻域，而且 $|b-b^*|+|d-d^*|+|v-v^*|+|w-w^*|$ 充分小时，映射 Π^q 与 Π^0 具相同性质.

为此，只需证明，当 $q\to 0$，在 $R^q\backslash V$ 上一致地有

$$\Pi^q(y, z)\to\Pi^0(y, z),$$
$$D\Pi^q(y, z)\to D\Pi^0(y, z).$$

此外，还可验证 $D\Pi^0(y_0^*, z_0^*)$ 的特征根皆位在单位圆内.

综合上述，得

命题 7.22　设 V 是 $(dv/w, d, 1)$ 在 $\mathbb{R}_+^3$ 内的一个充分小邻域，则存在 $\rho^*>0$，及 $\varepsilon>0$，使得如果 $\rho>\rho^*$，$|b-b^*|+|d-d^*|+|v-v^*|+|w-w^*|<\varepsilon$，则系统 (7.105) 在 $\mathbb{R}_+^3\backslash V$ 内存在唯一周期轨道，而且 (7.105) 自 $\mathbb{R}_+^3\backslash V$ 内出发并且不在奇点的稳定流形上的轨道，当 $t\to\infty$ 时趋于此周期轨道.

至此，第(一)步的轮廓已勾画完成，跟着进行第(二)步，即得所求结果(命题 7.19).

7.4.8　描写生态系统的三维 Volterra 型微分方程的周期轨道存在性[1)]

1)　Hofbauer [176] 用 Hopf 分枝理论证明了：

n 维 Volterra-Lotka 微分方程容纳稳定极限环 $\Leftrightarrow n\geq 3$.

这里，Volterra-Lotka 微分方程是指定义在 $\mathbb{R}_+^n=\{x=(x_1, \cdots, x_n)\in \mathbf{R}^n|x_i\geq 0, \forall i\}$ 的

$$\dot{x}_i = x_i\left(a_{i0}+\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right),\ i=1, \cdots, n.$$

当 $n=2$ 时，此系统不可能有孤立的周期轨道(见 Coppel[177]).

当 $n=3$ 时，[illegible][178] 用数值方法找到一个稳定的极限环.

此外，还可参考 Hofbauer-Schuster-Sigmund-Wolff[179]，Schuster-Sigmund-Wolff [180, 181]，Redheffer 与周之铭[218, 219]，周之铭 [220] 用图论方法研究了 Volterra 系统，获得有趣的结果.

Grasman[55] 用定理 3.4(见上述 3.4)证明了下列三维动力系统存在周期轨道(这系统即 3.4 中的(3.12)):

$$\begin{aligned}\dot{N}_1&=N_1(1-N_1-\alpha N_2-\beta N_3)+\varepsilon,\\ \dot{N}_2&=N_2(1-\beta N_1-N_2-\alpha N_3)+\varepsilon,\\ \dot{N}_3&=N_3(1-\alpha N_1-\beta N_2-N_3)+\varepsilon,\end{aligned}\tag{7.109}$$

其中 $0<\beta<1<\alpha$, $\alpha+\beta>2$, $0<\varepsilon\ll 1$.

下列引理保证了系统(7.109)存在一正向不变球体:

引理 存在 $\delta>0$, $\Delta>0$, 使得 $M_0=\{(N_1, N_2, N_3)\in\mathbb{R}^3|\delta\leqslant N_i\leqslant\Delta\}$ 是(7.109)的正向不变集.

证明大意是:当 $N_i=B=[1+(1+4\varepsilon)]^{1/2}/2$, $N_j\geqslant 0$, $j\neq i$ 时,证明 $\dot{N}_i\leqslant 0$; 然后利用连续性推理,选取 $\delta>0$, 使得当 $N_i=\delta$, $0\leqslant N_j\leqslant B$, $j\neq i$ 时, $\dot{N}_i\geqslant 0$. ∎

注意及如对 N_i 的附标作循环置换 $1\to2\to3\to1$, 系统(7.109)保持不变. 这表明直线 $N_1=N_2=N_3$ 是不变集. 事实上,此直线在 M_0 的部份属于奇点$(\gamma^*, \gamma^*, \gamma^*)$的稳定流形,此处 $\gamma^*=[1+(1+4\varepsilon\rho)]^{1/2}/2\rho$, $\rho=1+\alpha+\beta$. 这是(7.109)在 M_0 内的唯一奇点.

对应于此奇点的特征根是

$$\lambda_1=-\sqrt{1+4\varepsilon\rho}<0,$$

$$\lambda_{2,3}=1-\gamma^*(1+\rho)+(\alpha\gamma^*+\beta\gamma^*)/2\pm i\sqrt{3}(\beta\gamma^*-\alpha\gamma^*)/2.$$

可以证明,当

$$\rho_1=(1-3\varepsilon-\sqrt{1-12\varepsilon})/\varepsilon<\rho<(1-3\varepsilon+\sqrt{1-12\varepsilon})/\varepsilon=\rho_2$$

时, $\mathrm{Re}(\lambda_{2,3})>0$. 当 $\varepsilon\to0$, $\rho_1\to3$, $\rho_2\to\infty$; 所以对于 $\alpha+\beta>2$ 及 ε 充分小时,此奇点有一个负特征根和两个具正实部的特征根. 假设 α, β, ε 已按此要求选定.

在作柱面坐标变换之前,先作下列变换:

$$\begin{cases}x_1=(-N_1+N_3)/\sqrt{2},\\ x_2=(-N_1+2N_2-N_3)/\sqrt{6},\\ x_3=(N_1+N_2+N_3)/\sqrt{3}-\sqrt{3}\gamma^*.\end{cases}$$

这变换把奇点$(\gamma^*, \gamma^*, \gamma^*)$移至原点，把稳定流形 $N_1=N_2=N_3$ 移至直线 $x_1=x_2=0$ 上去，同时把凸区域 M_0 变成(x_1, x_2, x_3)空间中的凸区域 M. 奇点$(x_1, x_2, x_3)=(0, 0, 0)$对应的特征根和原系统的相同. 所以新系统满足定理 3.4 的假设(i), (ii), (iii).

运用变换(3.10)可把此新系统变成(3.11)的形式(参考上述 3.4). 为了验证定理 3.4 的条件(iv)是否成立，只需考虑 $\dot{y}_1$ 的表达式:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1=\frac{\sqrt{3}}{2}&[(\beta-1)(N_1^2N_2+N_2^2N_3+N_3^2N_1)+(1-\alpha)(N_1N_2^2\\&+N_2N_3^2+N_3N_1^2)+3(\alpha-\beta)N_1N_2N_3][N_1^2+N_2^2+N_3^2\\&-N_1N_2-N_2N_3-N_3N_1]^{-1}.\end{aligned}$$

可以证明，当$(N_1, N_2, N_3)\in M_0$, $\dot{y}_1\neq 0$, 从而 $\dot{y}_1\neq 0$ (在 M^c). 事实上，$N_1+N_2^2+N_3^2-N_1N_2-N_2N_3-N_3N_1=\frac{3}{2}(x_1^2+x_2^2)$, 又上式之分子 $\mathscr{U}$ 在$\{(N_1, N_2, N_3)\in\mathbb{R}^3|N_i\geqslant 0\}$的每个坐标面上都非正，加上方向导数 $(\partial/\partial N_1+\partial/\partial N_2+\partial/\partial N_3)\mathscr{U}=(\beta-\alpha)(N_1^2+N_2^2+N_3^2-N_1N_2-N_2N_3-N_3N_1)=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)(x_1^2+x_2^2)$. 故当 $x_1^2+x_2^2\neq 0$ 时，$\dot{y}_1\neq 0$; 至于 $x_1^2+x_2^2=0(\Leftrightarrow N_1=N_2=N_3)$时，改写 $\dot{y}_1$ 为

$$\begin{aligned}\dot{y}_1=&2(\beta-\alpha)\gamma^*+2/\sqrt{3}(\beta-\alpha)y_3+\sqrt{6}(\beta-\alpha)y_2\sin y_1\cos^2 y_1\\&+\sqrt{2}(\alpha+\beta-2)y_2\sin^2 y_1\cos y_1\\&+\sqrt{2}/\sqrt{3}(\alpha-\beta)y_2\sin^3 y_1-\sqrt{2}/3(\alpha+\beta-2)y_2\cos^3 y_1.\end{aligned}$$

当 $N_1=N_2=N_3$, $y_2=0$. 又当 $y\in M^c$, $y_3>-\sqrt{3}\gamma^*$, 故由上式知，这时 $\dot{y}_1\neq 0$.

因此，定理 3.4 的全部假设成立，从而系统(7.109)存在周期轨道.

7.4.9 描写生物控制系统的 n 维分块线性系统的周期轨道存在性

Glass 与 Pasternack[59] 考虑下列分块线性系统

$$\frac{dx_i}{dt}=A_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n)-x_i,\ i=1, \cdots, n, \qquad (7.110)$$

其中 $\Delta_i \neq 0$, 当$(x_1, \cdots, x_n) \neq (0, \cdots, 0)$; 线性函数 $\Delta_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n)$的正负号与 x_i 无关, $\forall i$; 布尔变量 $\tilde{x}_i$ 之定义为:

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} 1, & x_i > 0, \\ 0, & x_i < 0. \end{cases}$$

另外, 当$(x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0)$, $\Delta_i = 0$, $\forall i$.

连续曲线$(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$如果是分段可微, 满足系统(7.110), $\forall x_i \neq 0$, 则称为(7.110)的解. (7.110)的解$(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$, 若对每个 i, $x_i(t) = 0$ 仅在 t 的孤立点上成立, 则称为非奇异解. [59]仅考虑非奇异解,并利用 Poincaré 映射证明:在一定条件下,(7.110)存在稳定的周期轨道.

(7.110)是描述一类生物控制系统的数学模型,有关背景详见[59].

设$(c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $c_i \neq 0$, $\forall i$, 即$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$不属于任一坐标平面. (7.110)自$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$出发的局部解由下式给出:

$$x_i(t) = \lambda_i + (c_i - \lambda_i)e^{-t}, \ i = 1, 2, \cdots, n, \tag{7.111}$$

其中 $\lambda_i = \Delta_i(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $\tilde{c}_i$ 是 c_i 对应之 Boole 变量. (7.111)所确定的解是从$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$出发指向点$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$的直线. (7.110)在同一坐标卦限内的局部解都是指向同一点(称为"聚焦点")的直线. (7.111)确定了(7.110)在坐标平面以外的解, 可把它们延拓至坐标平面, 但是在坐标平面处,解会呈"折线"形(不可微).

由于假设 $\Delta_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n)$之符号与 x_i 无关, 可以证明在坐标平面处, (7.110)的解是完全确定的. 用 Boole n 组 $\mathcal{O}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$表示 $\mathbb{R}^n$ 的 2^n 个卦限,当第 i 坐标为正时, $a_i = 1$,当第 i 坐标为负时, $a_i = 0$. 令 $S(a_1, \cdots, a_{i-1}, *, a_{i+1}, \cdots, a_n)$表示坐标平面 $x_i = 0$ 上满足下列条件的开集:

$$\tilde{x}_1 = a_1, \ \tilde{x}_2 = a_2, \ \cdots, \ \tilde{x}_{i-1} = a_{i-1}, \ \tilde{x}_{i+1} = a_{i+1}, \ \cdots, \ \tilde{x}_n = a_n.$$

称 $S(a_1, \cdots, a_{i-1}, *, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ 为毗邻的两个卦限 $\mathscr{O}(a_1, \cdots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ 和 $\mathscr{O}(a_1, \cdots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ 的"公共边界". 因 Δ_i 无处为零, 故(7.110)的轨道无切地趋向"公共边界". 自同一卦限出发的轨道不能在"公共边界"处相交. 所以, 若要证明来自不同卦限的两轨道可在"公共边界"上某点连接起来, 仅需证明在公共边界点处, 可确定轨道的方向. 这点可由 $\Delta_i(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)$ 符号与 x_i 无关这一假设来保证. 事实上, 若在 $\mathscr{O}(a_1, \cdots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ 及 $\mathscr{O}(a_1, \cdots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \cdots, a_n)$, $\Delta_i > 0$ 则(7.110)的轨道穿过"公共边界" $S(a_1, \cdots, a_{i-1}, *, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ 从 $\mathscr{O}(a_1, \cdots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ 流向 $\mathscr{O}(a_1, \cdots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \cdots, a_n)$; 若在这两卦限 $\Delta_i < 0$, 则轨道流向与上述相反.

于是, (7.110)所确定的动力流, 可用 n 维立方体(带有向棱的)来表示. n 维立方体的顶点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 对应于卦限 $\mathscr{O}(a_1, \cdots, a_n)$, n 维立方体上的棱则对应于两卦限间的"公共边界", 棱之方向由动力流之方向决定. 这个具有向棱的 n 维立方体叫做(7.110)的状态过渡图.

例如, 下列系统的状态过渡图为图 36 所示:

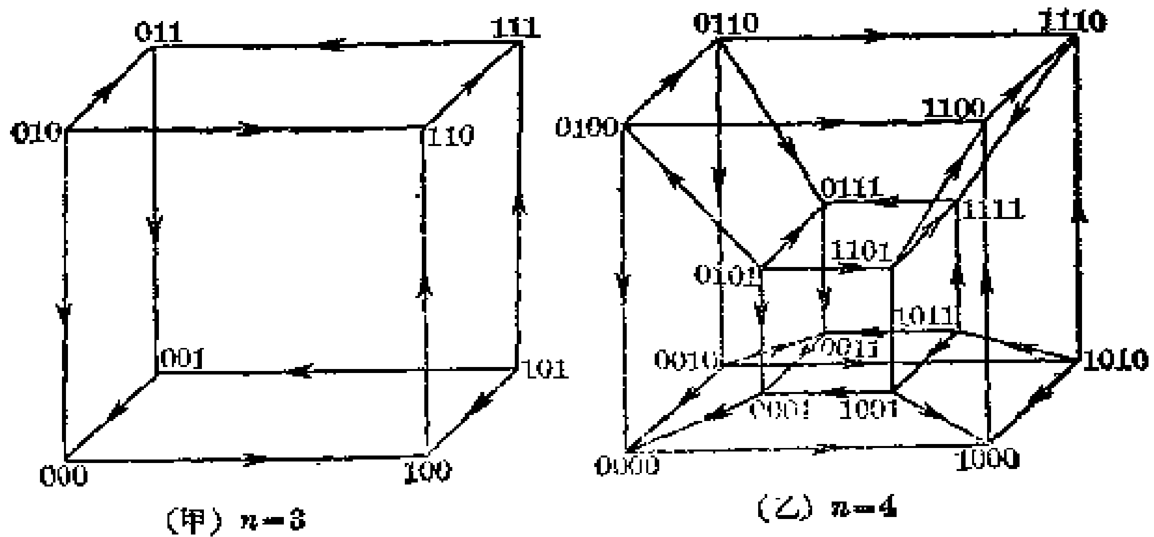
$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = (-1 + 2\tilde{x}_n) - x_n, \\
\dfrac{dx_i}{dt} = (-1 + 2\tilde{x}_{i-1}) - x_i, \quad i = 2, 3, \cdots, n,
\end{cases}
$$

其中 $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$.

现来引入若干定义:

(i) 具有向棱的 n 维立方体的闭路是 n 维立方体的一个有序顶点列 $(v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_k)$, 其中 v_i 分别与 v_{i-1}, v_{i+1} 相邻接, 每 v_i 在此序列中仅出现一次 $(i \neq 1,\ i \neq k)$; $v_1 = v_k$; v_i, v_{i+1} 之间的棱的方向是由 v_i 指向 v_{i+1}.

(ii) 已知闭路 $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$, 若 $v_l \notin (v_1, v_2, \cdots, v_k)$, 但 v_l 与某 $v_i \in (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ 相邻接, 则称 v_l 与 $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ 相



(甲) $n=3$　　(乙) $n=4$

图 36

邻接.

(iii) 若存在$(n-2)$个顶点邻接于 $v_i\in(v_1, \cdots, v_k)$, $\forall i$, 而且连接任一邻接顶点到 v_i 的棱均指向 v_i, 则称$(v_1, \cdots, v_k)$为闭路吸引子.

(iv) n 维立方体的 n 维闭路吸引子是这样的闭路吸引子, 它不属于任何m维子立方体$(m<n)$.

[59]运用 Poincaré 映射证明了下列命题:

命题 7.23(Glass-Pasternack[59]) 设 n 维动力系统(7.110)的状态过渡图存在 n 维闭路吸引子, 则下列情况之一发生:

(1) 在(7.110)的相空间内, 存在一稳定周期轨道, 它按闭路吸引子在状态过渡图中的顺序经过对应的卦限. 自此闭路吸引子的顶点所对应的卦限出发, 以及自此闭路吸引子的棱所对应的边界点出发的轨道, 当 $t\to\infty$ 时, 趋向此闭轨.

(2) 自此闭路吸引子所代表的卦限及边界出发的轨道, 当 $t\to\infty$ 时, 趋向坐标原点.

区分这两情况的方法是: 检查(7.110)所决定的某一矩阵的最大特征值是否大于1[如大于1则情况(1)发生].

证明 设 S 为闭路吸引子的一棱所代表的"公共边界", 则(7.110)定义了 Poincaré 映射 $P: S\to S$. 然后证明:

(1) $\lim\limits_{N\to\infty} P^N(z)=v^*$, $\forall z\in S$; $v^*\neq 0$.

或

(2) $\lim\limits_{N\to\infty} P^N(z)=0$, $\forall z\in S$.

在情况(1)，存在周期轨道 γ，经过 $v^*\in S$；情况(2)就是命题的第二种情况.

证明之关键是找出 Poincaré 映射的具体形式. 以下将证明，此映射具有线性分式形状：

$$f(z)=\frac{Az}{1+\langle\phi,\ z\rangle},$$

其中 $A\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, $\phi\in\mathbb{R}^{n-1}$, $z\in S$, $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 代表 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的内积. 下面的引理 1 证明 A 是正元素阵，ϕ 是非负向量，至少有一非零分量. 引理 2 则应用 Perron 定理(参考 Bellman[182])证明了这个 Poincaré 映射的极限性质.

现来给出 Poincaré 映射的具体形式.

设 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\cdots$, $\mathcal{O}_L$ 分别是对应于(7.110)的状态过渡图的闭路吸引子的各顶点的卦限. 每个卦限 $\mathcal{O}_j$ 有 n 个邻接卦限. 对每 $\mathcal{O}_j$, $j=1, 2, \cdots, L$, 动力流从$(n-1)$个邻接卦限流入 $\mathcal{O}_j$，又从 $\mathcal{O}_j$ 流出，穿过 $\mathcal{O}_j$ 与 $\mathcal{O}_{j+1}$ 的公共边界，进入 $\mathcal{O}_{j+1}$; $\mathcal{O}_L$ 的“聚焦点”位于 $\mathcal{O}_1$.

设 S_1 是 $\mathcal{O}_L$ 与 $\mathcal{O}_1$ 之间的公共边界，S_j 是 $\mathcal{O}_{j-1}$ 与 $\mathcal{O}_j$ 之间的公共边界. 重编坐标轴的记号，可设序列 $\mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ 对应于顶点 $(1, 1, 1, \cdots, 1, 0)$, $(1, 1, 1, \cdots, 1, 1)$, $(0, 1, 1, \cdots, 1, 1)$. 由(7.111)知，经过点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathcal{O}_1$ 的轨道与 S_2 相交于 $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$，其中

$$x_1'=0,$$

$$x_i'=\frac{\lambda_i x_1-\lambda_1 x_i}{x_1-\lambda_1},\ i=2, 3, \cdots, n,$$

$$\lambda_i=A_i(1, 1, \cdots, 1),\ i=1, 2, \cdots, n.$$

因$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\in\mathcal{O}_2$, 故 $\lambda_1<0$, $\lambda_i>0$, $i=2, 3, \cdots, n$, 所以上列关系式可改写为

$$\begin{cases} x_1'=0, \\ x_i'=\dfrac{|\lambda_i/\lambda_1||x_1|+|x_i|}{|x_1/\lambda_1|+1}. \end{cases} \tag{7.112}$$

这些关系式对$(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0)\in S_1$也适用. 因此,所有自$\mathcal{O}_1$及$S_1$出发的轨道与$S_2$相交.

(7.112)所定义的映射$f_1: S_1\to S_2$呈线性分式形状

$$\frac{Az}{1+\langle\phi, z\rangle},$$

其中$z=(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$, 是坐标平面$x_n=0$上的点, A及ϕ由下列式子给出

$$A=\begin{bmatrix} |\lambda_2/\lambda_1| & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ |\lambda_3/\lambda_1| & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ |\lambda_{n-1}/\lambda_1| & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ |\lambda_n/\lambda_1| & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.113}$$

$$\phi=(1/|\lambda_1|, 0, 0, \cdots, 0).$$

映射f_1给出$f_1(z)$相对于坐标平面$x_1=0$上的基$(0, 1, 0, 0, \cdots, 0)$, $(0, 0, 1, \cdots, 0)$, $\cdots$, $(0, 0, 0, \cdots, 1)$的坐标.

同理,自S_2出发的轨道与S_3相交,等等,而自S_L出发的轨道与S_1相交. 设$f_j: S_j\to S_{j+1}$, $j=2, 3, \cdots, L-1$, $f_L: S_L\to S_1$. 于是可得 Poincaré 映射$P: S_1\to S_1$

$$P=f_L\circ f_{L-1}\circ\cdots\circ f_2\circ f_1.$$

可见P亦具线性分式形式(如f_1的一样).

引理 1 Poincaré 映射$P: S_1\to S_1$呈下形

$$P(z)=\frac{Az}{1+\langle\phi, z\rangle}, \quad \forall z\in S_1,$$

其中$A\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$是正元素阵, $0\neq\phi\in\mathbb{R}^{n-1}$为非负向量.

证明 注意及 $P=f_L\circ f_{L-1}\circ\cdots\circ f_2\circ f_1$，$f_j$ 形如(7.112)，(7.113)所示的线性分式映射，故 $P(z)=Az/[1+\langle\phi, z\rangle]$，$\forall z\in S_1$，而且 $0\neq\phi\in\mathbb{R}^{n-1}$ 为非负向量，$A\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. 考虑坐标平面 $x_n=0$ 上的基 $e_1=(1, 0, \cdots, 0)$，$e_2=(0, 1, \cdots, 0)$，$\cdots$，$e_{n-1}=(0, 0, \cdots, 1, 0)$. 因 $P: S_1\to S_1$，故 $P(e_j)=Ae_j/[1+\langle\phi, e_j\rangle]\in S_1$，从而 A 的第 j 列元素皆大于零，$j=1, \cdots, n-1$. ∎

引理 2 设 $P(z)=Az/[1+\langle\phi, z\rangle]$，其中 $A\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ 为正元素阵，$0\neq\phi\in\mathbb{R}^{n-1}$ 为非负向量，$0<\rho$ 是 A 的最大特征根，v 为其对应的特征向量. 则

$$\lim_{N\to\infty} P^N(z)=\alpha v,\ \forall 0\neq z\in\mathbb{R}_+^{n-1},$$

其中(i)当 $\rho>1$ 时，$\alpha=\dfrac{\rho-1}{\langle\phi, v\rangle}$；(ii)当 $\rho\leqslant 1$ 时，$\alpha=0$.

证明 按 Perron 定理(正元素阵 A 必有特征根 $\rho>0$，ρ 是单根，$\rho>|\sigma_i|$，σ_i 为 A 的其余特征根；而且 ρ 所对应的特征向量 v 之各分量皆正. 参见 Bellman[182])，v 为正向量. 又按 Bellman[182, p. 282 定理 4]得

$$M=\lim_{N\to\infty}\frac{A^N}{\rho^N},$$

其中 M 的各列皆为特征向量 v 乘以某常数. 考虑

$$P^N(z)=\frac{A^N z}{1+\langle\phi, z+Az+\cdots+A^{N-1}z\rangle}$$

$$=\frac{A^N z/\rho^n}{[1+\langle\phi, z+Az+\cdots+A^{N-1}z\rangle]/\rho^n}$$

当 $\rho\leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{N\to\infty} P^N(z)=0$；当 $\rho>1$ 时，有

$$\lim_{N\to\infty} P^N(z)=\frac{(\rho-1)}{\langle\phi, v\rangle}v.$$

事实上，令 $\Sigma_N(z)=\dfrac{z}{\rho^N}+\dfrac{Az}{\rho^N}+\dfrac{A^2z}{\rho^N}+\cdots+\dfrac{A^{N-1}z}{\rho^N}$,

$$\sigma_N(z)=\frac{z}{\rho^N}+\frac{Mz}{\rho^{N-1}}+\frac{Mz}{\rho^{N-2}}+\cdots+\frac{Mz}{\rho},$$

其中 $M=\lim\limits_{N\to\infty} A^N/\rho^N$. 于是

$$P^N(z)=\frac{A^N z/\rho^N}{\rho^{-N}+\langle\phi,\ \Sigma_N(z)\rangle}.$$

注意及
$$\lim_{N\to\infty}\frac{A^N z}{\rho^N}=Mz,\quad \forall z\in\mathbb{R}_+^{n-1};$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N}{\rho^N}=0\quad(\rho>1),$$

可推出
$$\lim_{N\to\infty}[\Sigma_N(z)-\sigma_N(z)]=0,\ \forall z\in\mathbb{R}_+^{n-1}.$$

另方面,
$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N(z)=\frac{Mz}{\rho-1},\quad \forall z\in\mathbb{R}_+^{n-1}.$$

因此,
$$\lim_{N\to\infty}\Sigma_N(z)=\frac{Mz}{\rho-1},\quad \forall z\in\mathbb{R}_+^{n-1}.$$

由此推得
$$\lim_{N\to\infty}P^N(z)=\frac{(\rho-1)Mz}{\langle\phi,\ Mz\rangle},\ \forall z\in\mathbb{R}_+^{n-1}.$$

当 $z\neq 0$, $Mz=\beta v$, β 为某非零常数, 所以

$$\lim_{N\to\infty}P^N(z)=\frac{(\rho-1)}{\langle\phi,\ v\rangle}v,\ \forall 0\neq z\in\mathbb{R}_+^{n-1}.$$ ▮

由引理 2, 有

$$P(v^*)=P(\lim_{N\to\infty}P^N(z))=\lim_{N\to\infty}P^{N+1}(z)$$
$$=v^*,\quad \forall 0\neq z\in\mathbb{R}_+^{n-1},\ \rho>1;$$

其中 $v^*=\dfrac{(\rho-1)}{\langle\phi,\ v\rangle}v$; 当 $\rho\leqslant 1$, 有 $P(0)=0$; 再注意及 $P^N(z)$ 的极限性质, 可见命题 7.23 成立. ▮

用 Poincaré 映射研究分块线性系统的周期轨道存在性的工作, 还有 Гаушус[60] 的专著. 这本专书总结了 Неймарк[183] 的工作和 Гаушус 本人的工作. 其中第 12～14 章专门讨论三维分块线性系统, 第 15 章讨论四维分块线性系统; 例如三维动力系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-k(z), \\ \dfrac{dz}{dt}=-k(z)+\Omega\,\mathrm{sgn}\,x+y, \end{cases}$$

其中
$$k(z)=\begin{cases} 1, & z\in(a,\ \infty), \\ 0, & z\in[-a,\ a], \\ -1, & z\in(-\infty,\ -a). \end{cases} \qquad a\geqslant 0.$$

以及四维动力系统

$$[1+(h-1)F(u+a)]\frac{d\varepsilon}{dt}+\varepsilon=F(-u-a),$$

$$[1+(h-1)F(a-u)]\frac{d\eta}{dt}+\eta=F(u-a),$$

$$\frac{dz}{dt}=\varepsilon-\eta,$$

$$\frac{du}{dt}=z+S\varepsilon-S\eta,$$

其中 $a\geqslant 0$, $h\geqslant 0$, $S\geqslant 0$,

$$F(x)=\begin{cases} 1, & x\in(0,\ \infty), \\ 0, & x\in(-\infty,\ 0). \end{cases}$$

这些分块线性动力系统是在研究飞机及宇宙飞船的方向控制问题时产生的.

Arnold[184] 讨论了一个描写湖沼生态系统的三维动力系统:

$$\dot{x}_1=x_1[G_p(x_3)-ex_2-d],$$
$$\dot{x}_2=x_2[G_z(x_1)-c],$$
$$\dot{x}_3=mx_1[f-G_p(x_3)],$$

其中 $G_p(x_3)$及 $G_z(x_1)$是单调增加的 C^1 函数. 在湖沼学应用中, 取 $G_p(x_3)=ax_3/(x_3+k)$, $G_z(x_1)=bx_1/(x_1+L)$. 这系统描写浮游动物-浮游植物-磷养料这三者的生态关系. [184]利用中心流形理论研究了上述系统周期轨道存在性.

Swick[185], Gurtin & MacCamy[186, 187] 研究下列与单物种繁殖问

题有关的三维动力系统:

$$\begin{aligned}\dot{P}&=-\lambda(P)P+\beta(P)A,\\ \dot{G}&=-[\lambda(P)+\alpha]G+\beta(P)A,\\ \dot{A}&=-[\lambda(P)+\alpha]A+G.\end{aligned}$$

[187]证明了,若 $\beta(P)=\beta_0$, 则此系统不存在周期轨道. [185]提出猜想: 这个系统,一般地不存在周期轨道. 阮建成[165]解决了这个问题.

Hastings[188] 证明了: 当 ① $0<c<\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-a\right)$, ② $b>0$ 充分小, 则 Nagumo 方程

$$\ddot{u}-c\dot{u}+f(u)=w,$$

$$\dot{w}=\frac{b}{c}u.$$

有非常数周期解. 这个方程与研究神经脉冲序列有关.

7.5 与大气湍流现象有关的 Lorenz 方程的周期轨道

Robbins[57] 利用 Poincaré 映射研究了 Lorenz 方程 (Lorenz[144], Robbins[58])的周期轨道的存在性和稳定性. Lorenz 方程呈下形:

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dt}=R-zy-w,\\ \dfrac{dz}{dt}=wy-z,\\ \dfrac{dy}{dt}=\sigma(z-y).\end{cases}\tag{7.114}$$

作变换

$$t\mapsto \varepsilon t,\quad w\mapsto\frac{w}{\varepsilon^2\sigma},\ z\mapsto\frac{z}{\varepsilon^2\sigma},\quad y\mapsto\frac{y}{\varepsilon},\quad \varepsilon=\frac{1}{\sqrt{R\sigma}},$$

(7.114)变为

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dt}=-zy+\varepsilon(1-w),\\ \dfrac{dz}{dt}=wy-\varepsilon z,\\ \dfrac{dy}{dt}=z-\sigma\varepsilon y.\end{cases}\tag{7.115}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，(7.115)变为

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dt}=-zy,\\ \dfrac{dz}{dt}=wy,\\ \dfrac{dy}{dt}=z.\end{cases}\tag{7.116}$$

这时，w, z, y 满足下列关系：

$$w^2+z^2=B^2,\quad \frac{1}{2}y^2+w=D.$$

为了寻求 $\varepsilon\neq 0$ 时的周期解，把 w, z, y 按 ε 展开为幂级数：

$$w(t,\ \varepsilon)=w_0(t)+\varepsilon w_1(t)+\cdots,$$
$$z(t,\ \varepsilon)=z_0(t)+\varepsilon z_1(t)+\cdots,$$
$$y(t,\ \varepsilon)=y_0(t)+\varepsilon y_1(t)+\cdots.$$

把它们代入方程(7.115)，比较 ε 的各幂次的系数。首先看出，w_0, z_0, y_0 满足方程(7.116)。对于 $B>D>0$，此系统有解

$$\begin{cases}w_0(t)=B[1-2\,\mathrm{dn}^2(\sqrt{B}t+u_0)],\\ z_0(t)=-\alpha\sqrt{B}\,\mathrm{sn}(\sqrt{B}t+u_0)\mathrm{dn}(\sqrt{B}t+u_0),\\ y_0(t)=\alpha\,\mathrm{cn}(\sqrt{B}t+u_0),\end{cases}\tag{7.117}$$

其中 $\alpha=\sqrt{2(B+D)}$；B, D, u_0 由初始条件决定；sn, dn, cn 是 Jacobi 椭圆函数[在此，为简明起见，没有标出它们对模 k^2 的依赖性：$k^2=\alpha^2/(4B)$, $k'^2=1-k^2$]。事实上，由(7.116)推知，y_0 满足微分方程

$$y_0y_0'''-y_0'y_0''+y_0^3y_0'=0.$$

按 Kamke[189]，可解出 y_0，然后求出 $z_0=\dfrac{dy_0}{dt}$，再求出 w_0。

为确定起见，选取 u_0 使得

$$\begin{cases}w_0(0)=0,\\ z_0(0)=-B,\\ y_0(0)=\sqrt{2D},\end{cases}$$

及
$$\begin{cases} w(0,\ \varepsilon)=w_0(0), \\ z(0,\ \varepsilon)=z_0(0), \\ y(0,\ \varepsilon)=y_0(0), \end{cases}$$

从而使 $w_i(0)=z_i(0)=y_i(0)=0,\ \forall i>0.$

比较 ε 之系数，可得 w_1, z_1, y_1 满足的方程

$$\begin{cases} \dfrac{dw_1}{dt}=-z_0y_1-z_1y_0+1-w_0, \\ \dfrac{dz_1}{dt}=w_0y_1+w_1y_0-z_0, \\ \dfrac{dy_1}{dt}=z_1-\sigma y_0, \end{cases}$$

连同初始条件 $w_1(0)=z_1(0)=y_1(0)=0$，由此得到

$$\frac{d}{dt}(w_0w_1+z_0z_1)=w_0-z_0^2-w_0^2,$$

$$\frac{d}{dt}(y_0y_1+w_1)=1-w_0-\sigma y_0^2.$$

积分之，得
$$\begin{cases} w_0w_1+z_0z_1=R_0(t), \\ y_0y_1+w_1=S_0(t), \end{cases} \tag{7.118}$$

其中 $R_0(t)=B(1-B)t-2\sqrt{B}\,[E(\sqrt{B}t+u_0)-E(u_0)]$,

$$S_0(t)=(1-B+\sigma\beta^2)t-2\sqrt{B}\,(2\sigma-1)[E(\sqrt{B}t+u_0)-E(u_0)],$$

$$\beta=\sqrt{2(B-D)},$$

$E(u)$ 为第二类不完全椭圆积分，即 $E(u)=\int_0^u \mathrm{dn}^2u\,du$（参见 Bowman[190]）.

当 $z_0(t)\neq 0$ 时，(7.118)$\Rightarrow z_1(t)$ 可用 $y_1(t)$ 表出，从而由 $\dfrac{dy_1}{dt}=z_1-\sigma y_0$ 得出 $y_1(t)$ 满足下列线性方程：

$$\frac{d}{dt}y_1(t)-q(t)y_1(t)=r(t),$$

其中 $q(t)=w_0y_0/z_0$, $r(t)=(1/z_0)[R_0(t)-w_0S_0(t)]-\sigma y_0$.

令 $x=\sqrt{B}t+u_0$, 可求出此方程之解为

$$y_1=\frac{\operatorname{sn}x\operatorname{dn}x}{\alpha\sqrt{B}}\Big\{Y_0+\Big(\frac{\alpha^2}{\beta^2}\gamma+\eta\Big)(k^2\operatorname{cn}^2x-E^2(x))+2\eta xE(x)$$
$$-\frac{x^2}{2}(2-2B+\sigma B^2)-\frac{1}{\sqrt{B}}\Big[(a_1+a_2B)(x-E(x))$$
$$+(a_1-a_2B)\frac{\alpha^2}{\beta^2}E(x)\Big]\Big\}$$
$$+\frac{\operatorname{dn}^2x\operatorname{cn}x}{\alpha\sqrt{B}}\{-2\eta(E(x)-E_0)+(2-2B+\sigma B^2)(x-u_0)\}$$
$$+\frac{\operatorname{sn}^2x\operatorname{cn}x}{\alpha\sqrt{B}}\Big\{2\gamma k^2\frac{\alpha^2}{\beta^2}(E(x)-E_0)-\sigma\alpha^2k^2(x-u_0)\Big\},$$

其中 $\operatorname{dn}^2u_0=\frac{1}{2}$; $E_0=E(u_0)$; $\gamma=(2\sigma-1)B-1$; $\eta=(2\sigma-1)B+1$; $a_1=-\sqrt{B}(1-B)u_0+2\sqrt{B}E_0$; $a_2=-(1-B+\sigma\beta^2)\frac{u_0}{\sqrt{B}}+2\sqrt{B}(2\sigma-1)E_0$; $Y_0=-\Big(\frac{\alpha^2}{\beta^2}\gamma+\eta\Big)(k^2\operatorname{cn}^2u_0+E_0^2)+2\eta u_0E_0-(2-2B+\sigma\beta^2)\frac{u_0^2}{2}$.

于是 z_1, w_1 可由 y_1 及(7.118)求出.

当 $\varepsilon=0$ 时, $B>D>0$, 任一解都是周期为 $4K/\sqrt{B}$ 的周期解,

$$K=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}}.$$

为了决定 $\varepsilon\neq0$ 时的周期解, 寻求 B, D, T 应满足什么条件, 使得下列成立

$$w(T)=w(0)=0;\quad z(T)=z(0)=-B;$$
$$y(T)=y(0)=\sqrt{2D}.$$

令 $\varkappa=4K/\sqrt{B}$, $T=\varkappa+\tau$, 其中 $\tau=\tau_0+\varepsilon\tau_1$, 则

$$w(T)=w(\varkappa+\tau)=w_0(\varkappa)+\tau_0\frac{dw_0}{dt}(\varkappa)$$
$$+\varepsilon\Big[\tau_1\frac{dw_0}{dt}(\varkappa)+\tau_0\frac{dw_1}{dt}(\varkappa)+w_1(\varkappa)\Big]+O(\varepsilon^2),$$

$$z(T)=z(\varkappa+\tau)=z_0(\varkappa)+\tau_0\frac{dz_0}{dt}(\varkappa)$$

$$+\varepsilon\left[\tau_1\frac{dz_0}{dt}(\varkappa)+\tau_0\frac{dz_1}{dt}(\varkappa)+z_1(\varkappa)\right]+O(\varepsilon^2),$$

$$y(T)=y(\varkappa+\tau)=y_0(\varkappa)+\tau_0\frac{dy_0}{dt}(\varkappa)$$

$$+\varepsilon\left[\tau_1\frac{dy_0}{d\tau}(\varkappa)+\tau_0\frac{dy_1}{dt}(\varkappa)+y_1(\varkappa)\right]+O(\varepsilon^2).$$

观察 ε^0 的系数，由周期解条件，知 $\tau_0=0$；对于 ε 的系数，周期解条件为

$$w_1(\varkappa)+B\sqrt{2D}\tau_1=0,$$

$$z_1(\varkappa)=0,$$

$$y_1(\varkappa)-B\tau_1=0.$$

消去 τ_1 得
$$\sqrt{2D}\,y_1(\varkappa)+w_1(\varkappa)=0,$$

$$z_1(\varkappa)=0.$$

在(7.118)中，令 $t=\varkappa$，得出

$$0-Bz_1(\varkappa)=R_0(\varkappa),$$

$$\sqrt{2D}\,y_1(\varkappa)+w_1(\varkappa)=S_0(\varkappa).$$

所以，对于周期解，有

$$R_0(\varkappa)=0,\ S_0(\varkappa)=0.$$

用参数表出，这两关系式呈下形：

$$\begin{aligned}&(1-B)K-2E=0,\\&(1-B+\sigma\beta^2)K-2B(2\sigma-1)E=0.\end{aligned}\tag{7.119}$$

对每个 $\sigma>1$，存在唯一的 $(B_0,\ D_0)$ 满足这两方程．对于 $B<D$，类似地可得相应的周期解条件．

有了上述准备工作后，可转向证明：$\varepsilon\neq0$ 时，系统(7.115)存在(非常数)周期解．

考虑增广系统

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt} = -zy + \varepsilon(1-w), \\ \dfrac{dz}{dt} = wy - \varepsilon z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z - \sigma\varepsilon y, \\ \dfrac{d\varepsilon}{dt} = 0. \end{cases} \tag{7.120}$$

用 $\phi(B, D, t, \varepsilon)$ 表示(7.120)对应于初始条件 $(w, z, y, \varepsilon) = (0, -B, \sqrt{2D}, \varepsilon)$ 的解. 当 $B > D > 0$ 时, ϕ 是 B, D, ε 的解析函数. 由上面的计算知, 存在周期解 $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) = \phi(B_0, D_0, t, 0) = \begin{bmatrix} w_0(B_0, D_0, t) \\ z_0(B_0, D_0, t) \\ y_0(B_0, D_0, t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中 (B_0, D_0) 是(7.119)的解. 令 $\Sigma = \{(w, z, y, \varepsilon) \in \mathbb{R}^4 \mid w = 0\}$, 可见 $\dot{\gamma}(0)$ 不与 Σ 相切. 于是存在 Poincaré 映射 $P: \Sigma \supset \Sigma_0 \to \Sigma$, Σ_0 为某开集, $\gamma(0) \in \Sigma_0$, P 就是映射

$$P: \phi(B, D, 0, \varepsilon) \mapsto \phi(B, D, \varkappa + \tau, \varepsilon),$$

其中 $\tau = \tau(B, D, \varepsilon)$ 是由轨道穿过曲面 Σ 这条件所唯一确定的光滑函数. 注意及 $\tau(B, D, 0) = 0$, 故 τ 可表为

$$\tau(B, D, \varepsilon) = \tau_1(B, D)\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

由周期解条件 $w_1(\varkappa) + B\sqrt{2D}\,\tau_1 = 0$ 推得

$$\tau_1(B, D) = -\frac{1}{B\sqrt{2D}}\, w_1(B, D, \varkappa).$$

为了证明对于微小的 $\varepsilon \neq 0$, 系统存在周期解, 必须寻找函数

$$B = B(\varepsilon), \quad D = D(\varepsilon),$$

其中 $B(0) = B_0$, $D(0) = D_0$, 使得下式成立

$$\phi(B, D, \varkappa + \tau, \varepsilon) - \phi(B, D, 0, \varepsilon) = 0. \tag{7.121}$$

注意及: $\forall (B, D, \varepsilon)$ (接近 $(B_0, D_0, 0)$ 者), 这向量方程左方之第

一、第四分量为零，故条件(7.121)等价于

$$F(B,D,\varepsilon)=\begin{bmatrix} z(B,D,\varkappa+\tau,\varepsilon)-z(B,D,0,\varepsilon) \\ y(B,D,\varkappa+\tau,\varepsilon)-y(B,D,0,\varepsilon) \end{bmatrix}=0. \quad (7.122)$$

可惜 $\varepsilon=0$ 是(7.122)的解($\forall(B,D)$)，故不能引用隐函数定理于(7.122)；所以转而考虑 $H(B,D,\varepsilon)=F(B,D,\varepsilon)/\varepsilon$。

为了证明下列极限存在

$$H(B,D,0)=\lim_{\varepsilon\to 0}[F(B,D,\varepsilon)/\varepsilon],$$

采取表示式

$$z(B,D,\varkappa+\tau,\varepsilon)=z_0(B,D,\varkappa+\tau)+\varepsilon\hat{z}(B,D,\varkappa+\tau,\varepsilon)$$

$$=z_0(B,D,\varkappa)+\frac{\partial z_0}{\partial t}\Big|_{(B,D,\varkappa)}\tau+\frac{\partial^2 z_0}{\partial t^2}\Big|_{(B,D,\rho)}\frac{\tau^2}{2!}+\varepsilon\hat{z},$$

其中 $\varkappa<\rho<\varkappa+\tau$。对于 $y(B,D,\varkappa+\tau,\varepsilon)$ 亦采用类似的展开式。于是

$$F(B,D,\varepsilon)=\begin{bmatrix} \frac{\partial z_0}{\partial t}\Big|_{(B,D,\varkappa)}\varepsilon\tau_1+\varepsilon\hat{z}+O(\varepsilon^2) \\ \frac{\partial y_0}{\partial t}\Big|_{(B,D,\varkappa)}\varepsilon\tau_1+\varepsilon\hat{y}+O(\varepsilon^2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \varepsilon\hat{z}+O(\varepsilon^2) \\ -\varepsilon B\tau_1+\varepsilon\hat{y}+O(\varepsilon^2) \end{bmatrix}.$$

事实上，

$$z(B,D,t,\varepsilon)=z_0(B,D,t)+\varepsilon z_1(B,D,t)+\cdots$$

而且按初值条件：$w_i(0)=z_i(0)=y_i(0)=0$, $\forall i>0$，及周期性，得 $z(B,D,0,\varepsilon)=z_0(B,D,0)=z_0(B,D,\varkappa)=0$。注意及 $\tau=\tau_1\varepsilon+O(\varepsilon^2)$。另外，$\frac{\partial z_0}{\partial t}\Big|_{(B,D,\varkappa)}=w(B,D,\varkappa)y(B,D,\varkappa)=0\cdot\sqrt{2D}=0$。$\frac{\partial y_0}{\partial t}\Big|_{(B,D,\varkappa)}=z_0(\varkappa)=-B$。

$$H(B,D,\varepsilon)=\begin{bmatrix} -R_0\cdot B \\ S_0^{\cdot}/\sqrt{2D} \end{bmatrix}+O(\varepsilon).$$

对于 $B=B_0$, $D=D_0$，有 $H(B_0,D_0,0)=0$。如果 $\varepsilon\neq 0$ 微小，而且

$$\left|\frac{\partial H}{\partial(B,D)}\right|_{(B_0,D_0,0)}\neq 0,$$

则按隐函数定理，系统(7.120)存在周期解(非常数). 可以算出，当$\sigma>1$时，

$$\left|\frac{\partial H}{\partial(B,\ D)}\right|_{(B_0, D_0, 0)}=\frac{-128K^2(D_0^2-B_0^2)(\sigma^2 D_0-1)}{\alpha^2\beta^2 B_0\sqrt{2D_0}}\neq 0.$$

因此，Robbins[57] 利用隐函数定理证明了：当$\varepsilon\neq 0$微小(当R为有限值)时系统(7.120)的 Poincaré 映射存在唯一的不动点，从而系统(7.115)存在周期解(非常数). 于是有下列命题：

命题 7.24(Robbins[57]) 当$\varepsilon\neq 0$微小时，系统(7.115)存在(非常数)周期解.]

此外，[57]还通过研究此周期轨道的 Poincaré 映射的特征根的性质，来证明其渐近稳定性.

回顾上面定义的 Poincaré 映射

P: $\Sigma\supset\Sigma_0\to\Sigma$,

其中$\Sigma=\{(w,\ z,\ y,\ \varepsilon)\in\mathbb{R}^4 | w=0\}$，具体一点

P: $\phi(B,\ D,\ 0,\ \varepsilon)\mapsto\phi(B,\ D,\ \varkappa+\tau,\ \varepsilon)$,

其中$\tau=\tau(B,\ D,\ \varepsilon)$为光滑函数，$\tau(B,\ D,\ 0)=0$. 现转用参数$(B,\ D)$表达此映射：注意及初始条件$(w,\ z,\ y,\ \varepsilon)=(0,\ -B,\ \sqrt{2D},\ \varepsilon)$，故

$$B=-z(0),\ D=y^2(0)/2.$$

在映射P作用下，$(B,\ D)$被映为

$$\begin{aligned}
P(B,\ D)&=\left(-z(B,\ D,\ \varkappa+\tau,\ \varepsilon),\ \frac{1}{2}y^2(B,\ D,\ \varkappa+\tau,\ \varepsilon)\right)\\
&=(B-\varepsilon z_1(B,\ D,\ \varkappa)+O(\varepsilon^2),\\
&\qquad D+\varepsilon\sqrt{2D}(-B\tau_1+y_1(B,\ D,\ \varkappa)+O(\varepsilon)))\\
&=(B-\varepsilon z_1(B,\ D,\ \varkappa)+O(\varepsilon^2),\\
&\qquad D+\varepsilon(w_1(B,\ D,\ \varkappa)+\sqrt{2D}y_1(B,\ D,\ \varkappa)+O(\varepsilon^2)))\\
&=(B+\varepsilon R_0(B,\ D,\ \varkappa)/B+O(\varepsilon^2),\\
&\qquad D+\varepsilon S_0(B,\ D,\ \varkappa)+O(\varepsilon^2))\\
&=(B+\varepsilon F(B,\ D,\ \varepsilon),\ D+\varepsilon G(B,\ D,\ \varepsilon)),
\end{aligned}$$

其中 $F(B,\ D,\ \varepsilon)=R_0(B,\ D,\ \varkappa)/B+O(\varepsilon)$，$G(B,\ D,\ \varepsilon)=S_0(B,\ D,\ \varkappa)+O(\varepsilon)$.

为了检验周期轨道的渐近稳定性，考察 $P(B,\ D)$ 在 $(B_0,\ D_0)$ 处的 Jacobi 阵的特征根；记此 Jacobi 阵为 $dP(B_0,\ D_0)$，有

$$dP(B_0,\ D_0)=\begin{bmatrix} 1+\varepsilon F_B(B_0,\ D_0) & \varepsilon F_D(B_0,\ D_0) \\ \varepsilon G_B(B_0,\ D_0) & 1+\varepsilon G_D(B_0,\ D_0) \end{bmatrix}$$

其特征根为

$$\lambda=1+\frac{\varepsilon}{2}(F_B+G_D)\pm\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{(F_B+G_D)^2-4(G_DF_B-F_DG_B)},$$

其中
$$F_D=\frac{8K\sqrt{B_0}}{\alpha^2\beta^2}\{B_0+1-2D_0\},$$

$$F_B=\frac{8K}{\sqrt{B_0}\alpha^2\beta^2}\{-2B_0+4D_0^2-D_0-B_0^2D_0\},$$

$$G_B=\frac{8K\sqrt{B_0}(1-D_0)}{\alpha^2\beta^2(D_0-B_0^2)}\{2B_0-D_0B_0^2-D_0\},$$

$$G_D=\frac{4K}{\sqrt{B_0}\alpha^2}\left\{-\sigma\alpha^2+\frac{2}{\beta^2}(-2B_0+D_0+B_0^2D_0)\right\}.$$

故
$$F_B+G_D=-\frac{4K(\sigma+2)}{\sqrt{B_0}}<0,$$

$$F_BG_D-F_DG_B=-\sqrt{2D_0}\left|\frac{\partial H}{\partial(B,\ D)}\right|_{(B_0,\ D_0)}$$

$$=\frac{128K^2(D_0-B_0^2)}{\alpha^2\beta^2B_0}(\sigma^2D_0-1)>0.$$

若 $|\lambda|<1$，则此周期轨道是渐近稳定的．如果 λ 是实根，则由上面最后两个不等式可保证 $|\lambda|<1$．若 λ 是复根，则当

$$F_B+G_D+\varepsilon(F_BG_D-F_DG_B)<0,$$

可保证 $|\lambda|<1$．当 ε 充分小时，这不等式是成立的．因此有

命题 7.25（Robbins[57]） Lorenz 方程(7.115)，当 ε 充分小时，其周期轨道是渐近稳定的． ▮

7.6 其他应用简介

高维动力系统的周期轨道存在问题，在天体力学方面有其重要位置，长期以来受研究人员的注意．有关的文献，近期的有：

Hadjidometriou [191] 对天体力学中关于周期轨道的研究情况作一综述（直到 1979 年底）．Meyer[192] 曾用 Poincaré 映射研究了限制 N 体问题的周期轨道存在性．Meyer[193] 用小参数法找出 N 体问题的六类新的周期轨道．其他文献可参见 [191, 192, 193] 的参考文献录．

对于特殊类型的高维动力系统，有下列研究结果：

Вайсборд[49]，Виноградов[50]，Назаров[51]，Mamrilla 及 Sędziwy[52]，Георгиев[53]．

现分别简介如下．

Вайсборд[49] 应用环区原理讨论了下列系统的周期轨道存在性：

$$\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2G_1(x)}{dt^2}+\frac{dG_2(x)}{dt}+G_3(x)=0.$$

如令
$$g_i(x)=\begin{cases}G_i(x)/x, & x\neq 0,\\ G_i'(0), & x=0,\ i=1,\ 2,\ 3,\end{cases}$$

则上述三阶方程与

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2-g_1(x_1)x_1,\\ \dot{x}_2&=x_3-g_2(x_1)x_1,\\ \dot{x}_3&=-g_3(x_1)x_1\end{aligned}$$

等价．所得结果，条件较冗繁，详见[49]．

Виноградов[50] 用环区原理讨论了一个三维动力系统和一个六维动力系统的周期轨道存在性．

Назаров[51] 及 Mamrilla 与 Sędziwy[52] 都是研究方程的非线性项是周期函数的情形．Mamrilla 与 Sędziwy[52] 推广了 [51]的工作．

Назаров[51] 用环区原理证明了:

命题 7.26(Назаров[51]) 设 $f\in C^1(\mathbb{R}^1)$; $f(x+2\pi)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}^1$; $f'(x)<ab$, $\forall x\in[0, 2\pi]$; 则方程

$$\dddot{x}+a\ddot{x}+b\dot{x}+f(x)=0;\ a, b>0; f(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}^1$$

存在非常数周期解.

[52]推广上结果,用 Brouwer 不动点定理证明了

命题 7.27 (Mamrilla 与 Sedziwy [52]) 设 $\varphi(\lambda)=\lambda^{n-1}+\alpha_1\lambda^{n-2}+\cdots+\alpha_{n-1}$ 的根 λ 满足 $\mathrm{Re}(\lambda)<0$, f: $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 连续, 而且

$$f(x, y+1)=f(x, y),\ -\infty<K\leqslant f(x, y)<0,$$
$$\forall(x, y)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^1.$$

则方程

$$y^{(n)}+\alpha_1 y^{(n-1)}+\cdots+\alpha_{n-1}y^{(1)}+f(y^{(1)}, \cdots, y^{(n-1)}, y)=0$$

存在解 $y=y(t)$ 满足下列性质: $\exists\omega>0$, 使得

$$y(t+\omega)=y(t)+1,\ \forall t\in\mathbb{R}^1.$$

而且若 $f(x, y)=F(y)$, 则 $\omega\in[-\alpha_{n-1}/m, -\alpha_{n-1}/M]$, 其中

$$m=\min_{y\in[0,1]}F(y),\ M=\max_{y\in[0,1]}F(y).$$

Георгиев[53] 讨论了下列方程的周期解(非常数)存在性:

$$\dddot{x}+a\ddot{x}+b\dot{x}+abx-g(x)=0,$$

其中 g: $\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 为 C^1 映射,并满足

(1) $a>0$, $b>0$;

(2) $g(-x)=-g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}^1$;

(3) $g'(x)<0$, $\forall x\in[0, \alpha)$; $g'(x)>0$, $\forall x\in(\alpha, x_1]$;

(4) $\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|\leqslant k<ab$, 其中 $k<\dfrac{a\sqrt{b}(a^2+b)}{2(\sqrt{b}+\sqrt{a^2+b})}$;

(5) $\dfrac{g(x)}{x}>0$, $\forall x\in[x_1, +\infty)$;

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x}=l>0$.

作变换 $y=ax+\dot{x}$, $z=bx+a\dot{x}+\ddot{x}$, 可把上方程化为下列等价系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y-ax,\\ \dot{y}&=z-bx,\\ \dot{z}&=-abx+g(x).\end{aligned}\tag{7.123}$$

[53]用 Brouwer 不动点定理证明了:

命题 7.28(Георгиев[53]) 设 g: $\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$, $g\in C^1(\mathbb{R}^1)$, 条件(1)~(6)成立,则系统(7.123)存在周期轨道.

附　　录

1. Brouwer 不动点定理的初等证明

1978, Milnor[28] 给出 Brouwer 不动点定理的一个初等证明；1980, Rogers[29] 给出了一个较自然的证明．以下介绍 Rogers 的初等证法．

Brouwer 不动点定理　n 维实心球 $B^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\leqslant 1\}$ 的任一自映射(连续) $\varphi: B^n\to B^n$ 至少有一不动点，即至少有一个点 $x\in B^n$ 使得 $\varphi(x)=x$.

收缩映射定理　$n-1$ 维球 $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|=1\}$ 的恒同映射不能扩张为连续映射 $\varphi: B^n\to S^{n-1}$.

上面两个定理是等价的，证明见江泽涵著《拓扑学引论》，p.168～169.

收缩映射定理可表述为：

不存在具下述性质的映射 $f: B^n\to S^{n-1}$

(i) f 为连续、满映射；

(ii) $f(x)=x$, $\forall x\in S^{n-1}$.

收缩映射定理是下列两引理的明显结果．

引理 1　若存在 B^n 到 S^{n-1} 上的连续、满映射，使得 S^{n-1} 的每

点都是不动点，则存在具同样性质的连续可微、满映射.

引理 2　B^n 到 S^{n-1} 上的连续可微、满映射，不可能使 S^{n-1} 的每点均为不动点.

引理 1 的证明　设 $f: B^n \to S^{n-1}$ 是连续、满映射，且 $f(x)=x$, $\forall x \in S^{n-1}$（故 $\|f(x)\|=1$），则 $f(x)-x$ 在 B^n 上连续，在 S^{n-1} 上恒为零，并且满足

$$\|f(x)-x\|<2,\ \forall x \in B^n.$$

因此，可取 $\theta \in (3/4,\ 1)$ 使得

$$\theta \leqslant \|x\| \leqslant 1 \Rightarrow \|f(x)-x\|<1/4.$$

设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 n 个单位坐标向量. 由 Weierstrass 逼近定理，可选取 n 个多项式 $P_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 使得

$$\left\|\sum_{i=1}^n P_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)e_i-(f(x)-x)\right\|<1/4,\ \forall x \in B^n.$$

为了简化记号，令

$$P(x)=\sum_{i=1}^n P_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)e_i.$$

再利用 Weierstrass 逼近定理，可选取多项式 Q，使满足下列条件：

(1) $3/4 \leqslant Q(r^2) \leqslant 1,\ \forall r \in [0,\ \theta]$;

(2) $|Q(r^2)| \leqslant 1,\ \forall r \in [\theta,\ 1]$;

(3) $Q(1)=0$.

考虑
$$g(x)=x+Q(\|x\|^2)P(x).$$

当 $0 \leqslant \|x\| \leqslant \theta$ 时，有

$$\begin{aligned}
\|g(x)\| &= \|x+Q(\|x\|^2)P(x)\| \\
&= \|f(x)+Q(\|x\|^2)\{P(x)-f(x)+x\} \\
&\quad +\{Q(\|x\|^2)-1\}\{f(x)-x\}\| \\
&\geqslant \|f(x)\|-|Q(\|x\|^2)|\cdot\|P(x)-f(x)+x\| \\
&\quad -|1-Q(\|x\|^2)|\cdot\|f(x)-x\| \\
&\geqslant 1-1\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

同样，对于 $\theta\leqslant\|x\|\leqslant 1$，有

$$\begin{aligned}\|g(x)\|&=\|x+Q(\|x\|^2)\{P(x)-f(x)+x\}\\&\quad+Q(\|x\|^2)\{f(x)-x\}\|\\&\geqslant\|x\|-|Q(\|x\|^2)|\cdot[\|P(x)-f(x)+x\|+\|f(x)-x\|]\\&\geqslant\theta-1\cdot\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]\geqslant\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

所以，
$$\|g(x)\|\geqslant\frac{1}{4},\ \forall x\in B^n.$$

对于 $\|x\|=1$，有 $g(x)=x$. 定义映射 h: $B^n\to S^{n-1}$ 如下：

$$h(x)=g(x)/\|g(x)\|,\ x\in B^n.$$

因 g 之各分量都是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的多项式，故连续可微，从而 h 亦连续可微. 显然，$h(x)=x$, $\forall x\in S^{n-1}$. ▌

引理2的证明　设 f: $B^n\to S^{n-1}$ 是连续可微的满映射，且 $f(x)=x$, $\forall x\in S^{n-1}$. 令

$$\begin{gathered}g(x)=f(x)-x,\\f_t(x)=x+tg(x)=(1-t)x+tf(x),\\x\in B^n,\ t\in[0,1].\end{gathered}$$

因 f 连续可微，故 g 亦连续可微，于是存在常数 C 使得

$$\|g(y)-g(x)\|\leqslant C\|y-x\|,\ \forall y,\ x\in B^n.$$

如果 $t\in[0,1/C)$，且 $f_t(x)=f_t(y)$，则 $x=y$. 事实上，

$$\|x-y\|=\|tg(y)-tg(x)\|\leqslant tC\|y-x\|\Rightarrow x=y.$$

所以，当 $0\leqslant t<1/C$ 时，映射 f_t: $B^n\to B^n$ 是一对一的.

由于 g 对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的偏微商是一致有界的，故 Jacobi 阵

$$\partial f_t/\partial x=I_n+t\,\partial g/\partial x \tag{1}$$

当 $t\in[0,t_0]$, $t_0>0$ 充分小时，是非奇异的. 因此，当 $t\in[0,t_0]$ 时，由反函数定理知，f_t 把 B^n 的内部映为开集 $G_t\subset B^n$. 考虑 $c\in B^n\backslash G_t$, $t\in[0,t_0]$. 联结 c 和 g（$g\in G_t$ 任取）；设此线段与 G_t 的边界的交点为 b. 因 $f_t(B^n)$ 是紧致集，故存在 $x\in B^n$ 使得 $b=f_t(x)$.

又因 $b\notin G_t$，故 $x\notin \mathrm{Int}(B^n)$，从而 $\|x\|=1$．所以 $b=x$，而且 e，b 均在 S^{n-1} 上．另外，注意到 f_t 把 S^{n-1} 映到自身，所以当 $t\in[0, t_0]$ 时，f_t: $B^n\to B^n$ 是一对一的满映射．

考虑积分

$$I(t)=\int\cdots\int_{B^n}\det(\partial f_t/\partial x)dx_1dx_2\cdots dx_n,$$

当 $t\in[0, t_0]$ 时，这就是计算 B^n 的体积 V_n 的公式．所以，$I(t)=V_n>0$，$t\in[0, t_0]$．但由(1)式知，$I(t)$是 t 的多项式，从而 $I(t)=V_n$，$\forall t\in[0, 1]$．

另方面，有

$$\langle f_1, f_1\rangle=\|f\|^2=1,$$

于是得

$$\left\langle\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, f_1\right\rangle=0,\ 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$\det(\partial f_1/\partial x)=0,\ \forall x\in B^n,$$

从而

$$I(1)=0,$$

遂生矛盾．引理 2 得证．∎

2．Belousov-Zhabotinskii 化学反应的实验

用下列配方进行实验，可容易产生 Belousov-Zhabotinskii (Белоусов-Жаботинский)反应的周期振荡(参考 Field[153])：

		初始浓度
150 ml	1 M H_2SO_4	1 M
0.175 g	$Ce(NO_3)_6(NH_4)_2$	0.002 M
4.292 g	$CH_2(COOH)_2$	0.28 M
1.415 g	$NaBrO_3$	0.063 M

在备有搅拌器的烧杯内，把 $CH_2(COOH)_2$ 及 $Ce(NO_3)_6\cdot(NH_4)_2$ 溶于硫酸中(注意！稀释硫酸时要按正确方法进行．另外，要先让硫酸溶液冷却)．这溶液首先呈黄色，经几分钟后，转

为无色．此时，加入 $NaBrO_3$，所得溶液将呈黄色，然后变为无色，……然后又呈黄色，变为无色……，这样以大约一分钟为周期进行振荡．若加入几 c. c. 浓度为 0.025 *M* 的 Ferroin(1, 10 phenanthroline iron；在水中把少量的 O-phenanthroline，即 $C_{12}H_8N_2 \cdot H_2O$，和硫酸亚铁，$FeSO_4 \cdot 2H_2O$，相混合，便产生 Ferroin)，则会呈现红色与蓝色的交替振荡现象。

参考文献

1. 秦元勋,微分方程所定义的积分曲线,科学出版社(1959).
2. 叶彦谦,极限环论,上海科学技术出版社(1965).
3. Arnold, V. I., *Ordinary Differential Equations*, MIT Press (1978).
4. Coddington, E. A. and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York(1955).
5. Hale J. K., *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Krieger, Malabar, Florida (1980).
6. Hartman P., *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York(1964).
7. Hirsch M. W. & Smale S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York(1974).
8. Nemytskii V. V. & Stepanov. V. V., *Qualitative Theory of Ordinary Equations*, Princeton Univ. Press(1980).(中译本:涅梅茨基-斯捷巴诺夫,微分方程定性论,科学出版社,1959)
9. Marsden J. & McCracken M., *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer-Verlag, New York(1976).
10. Hsu I. D. & Kazarinoff N. D., An applicable Hopf bifurcation formula for small periodic solutions of the Field-Noyes model, *J. Math. Analysis Applic*. 55, 61～89(1976).
11. Hassard B. & Wan Y. H., Bifurcation formula derived from center manifold theory, *J. Math. Analysis Applic*. 63, 297～312(1978).
12. Poincaré H., Sur les coubes définies par les équations differentielles, *J. de Math*. 3(7), 375～422(1881); 3(8), 251～296 (1882); 4(1), 167～244 (1885); 4(2), 151～217(1886).
13. Bendixson I., Sur les courbes définies par des équations differentielles, *Acta Math*. 24, 1～88(1901).
14. Schwartz A. J., A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds, *Am. J. Math*. 85, 453～458 (1963); errata, ibid., 85, 753(1963).
15. Kneser H., Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen, *Math. Annalen*,

91, 135～154(1923).

16. D'Heedene R. N., A third order autonomous differential equation with almost periodic solutions, *J. Math. Analysis Applic.* 3, 344～350(1961).
17. Smith R. A., The Poincaré-Bendixson theorem for certain differential equations of higher order, *Proc. R. Soc.*, Edinb. 83A, 63～79(1979).
18. Smith R. A., Existence of periodic orbits of autonomous ordinary differential equations, *Proc. R. Soc.*, Edinb. 85A, 153～172(1980).
19. Smith R. A., Absolute stability of certain differential equations, *J. London Math. Soc.*, 7, 203～210(1973).
20. Sell G. R., Periodic solutions and asymptotic stability, *J. Diff. Equat.*, 2, 143～157(1966).
21. Deysach L. G. & Sell G. R., On the existence of almost periodic motions, *Michigan Math. J.*, 12, 87～95(1965).
22. Smale S., Differential dynamical systems, *Bull. Am. Math. Soc.* 73, 747～817(1976).
23. Fuller F. B., Note on trajectories in a solid torus, *Am. Ann. Math.* 2 (56), 438～439(1952).
24. Schweitzer P. A., Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations, *Am. Math.* 100(2), 386～400(1974).
25. Pliss V. A. (Плисс, В. А.), *Nonlocal Problems of the Theory of Oscillations*, Academic Press, New York(1966).
26. Reissig R., Sansone G. & Conti R., *Nichtlineare Differentialgleichungen höhere Ordnung*, Edizioni Cremonese, Rome(1969).
27. Smart D. R., *Fixed Point Theorems*, Cambridge University Press(1974).
28. Milnor J., Analytic proofs of the "Hairy Ball Theorem" and the Brouwer Fixed Point Theorem, *Am. Math. Monthly* 85, 521～524(1978).
29. Rogers C. A., A less strange version on Milnor's proof of Brouwer's fixed-point theorem, *Amer. Math. Monthly*, 525～527(1980).
30. Friedrichs D. O., On nonlinear vibrations of third order, *Studies in Nonlinear Vibration Theory*, Institute of Mathematics and Mechanics, New York University Press, 65～103(1946).
31. Rauch L. L., Oscillation of a third order nonlinear autonomous system, *Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations*, 1, 39～88(1950).
32. 李炳熙，一个三阶非线性微分方程的周期解，应用数学学报，第4期，39～48(1977).
33. Mulholland R. J., Nonlinear oscillations of a third order differential equation, *J. Nonlinear Mech.* 6, 279～294(1971).
34. Noldus E., Autonomous periodic motion in nonlinear feedback systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-19(4), 391～387(1974).
35. Noldus E., A frequency domain approach to the problem of the existence of

periodic motion in autonomous nonlinear feedback system, *Z. angew. Math. Mech.* 49, 167～177(1969).

36. Noldus E., A counterpart of Popov's theorem for the existence of periodic solutions, *Int. J. Control* 13,705～719(1971).
37. Леонов, Г. А., *Сибир. Мат. Журн.*, XIV, №.6, 1259～1265(1973).
38. Леонов, Г. А. и Буркин Е. М., ibid., XVIII, №.2, 251～262(1977).
39. Камачкин А. М., *Дифф. Уравн.*, 8, 1505～1506(1972).
40. Williamson D., Periodic motion in nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Control* AC-20, 4, 479～486(1975).
41. Williamson D., Periodic motion in a class of nth order autonomous differential equations, *J. Math. Analysis Applic.* 53, 669～679(1976).
42. Sherman S., A third-order nonlinear system arising from a nuclear spin generator, *Contr. Diff. Equations* 2, 197～227(1963).
43. Troy W. C., Oscillations in a third order differential equation modeling a nuclear reactor, *SIAM J. appl. Math.* 32(1), 146～153(1977).
44. Tyson J. J., On the existence of oscillatory solutions in negative feedback cellular control process, *J. Math. Biol.* 1, 311～315(1975).
45. Hastings S., Tyson J. & Werster D., Existence of periodic solutions for negative feedback cellular control systems, *J. Diff. Eqns.* 25, 39～64(1977).
46. Heiden U. an der, Existence of periodic solutions of a nerve equation, *Biol. Cybern.* 21, 37～39(1976).
47. Hastings S. P. & Murray J. D., The existence of oscillatory solutions in the field-noyes model for the Belousov-Zhabotinskii reaction, *SIAM J. Appl. Math.* 28(3), 678～688(1975).
48. Dai Lo Sheng, On the existence, uniqueness and global asymptotic stability of the periodic solution of the modified Michaelis Menten Mechanism, *J. Diff. Equat.* 31, 391～417(1979).
49. Вайсборд Э. М., О существовании периодического решений у нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка, *Мат. Сбор.*, Т. 56, 43～58 (1962).
50. Виноградов Н. Н., Некоторые теоремы о существовании периодического решения автономой системы шести дифференциальных уравнений, *Дифф. Уравн.*, 1 (3), 330～334 (1965).
51. Назаров Е. А., *Дифф. Уравн.* 6(2), 377～380(1970).
52. Mamrilla J. & Sędziwy S., The existence of periodic solutions of a certain dynamical system in a cylindrical space, *Boll. Un. Mat. Ita.* 4 (4), 119～122 (1971).
53. Georgeev N. N. (Георгиев Н. Н.), Investigation of a nonlinear differential equation of third order, *Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences* 28 (1), 17～19(1976).

54. Королев В. В., О существовании и единственности предельного цикла многомерных автономых систем, *Дифф. Уравн.*, 1(6), 736～741(1965).

55. Grasman W., Periodic solutions of autonomous differential equations in higher dimensional spaces, *Rocky Mountain J. Math.* 7(3), 457～466(1977).

56. Lloyd N. G., *Degree Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge(1978).

57. Robbins K. A., Periodic solutions and bifurcation structure at high R in the Lorenz model, *SIAM J. Appl. Math.* 36(3), 457～472(1979).

58. Robbins K. A., A moment equation description of a magnetic reversals in the earth, *Proc. Natl. Acad. Sci.* U. S. A. 73, 4297～4301(1976).

59. Glass L. & Pasternack J. S., Stable oscillations in mathematical models of biological control systems, *J. Math. Biol.* 6, 207～223(1978).

60. Гаушус Э. В., *Исследование Динамических Систем Методом Точечных Преобразований*, Издательство Наука, Москва(1976).

61. Брушлинская Н. Н., Качественное интегрирование одной системы n дифференциальных уравнений в области, содержащей особую точку и предельный цикл, *ДАН СССР*, Т. 139, 9～12(1961).

62. Abraham R. & Marsden J. E., *Foundations of Mechanics*, Benjamin, New York(1967).

63. Poincaré H., *Methodes Nouvelles de la Mechanique Celeste*, vol. 1, Paris(1892).

64. Podolak E. & Westreich D., Systems of first order differential equations with global periodic solutions, *Indiana Univ. Math. J.* 28(6), 869～882(1979).

65. Liapunov A., Problème générale de la stabilité du mouvement, *Ann. Sci Toulouse* 2, 203～474(1907).

66. Roels J., An extension to resonant case of Liapunov's theorem concerning the periodic solutions near a Hamiltonian equilibrium, *J. Diff. Eqns.* 9, 300～324(1971).

67. Roels J., Families of periodic solutions near a Hamiltonian equilibrium when the ratio of 2 eigenvalues is 3, *J. Diff. Eqns.* 10, 431～477(1971).

68. Schmidt D. S. & Sweet D., A unifying theory in determining periodic families for Hamiltonian systems at resonance, *Techn. Rept.* TR 73-3, University of Maryland(1973)

69. Bancroft S., Hale J. K. & Sweet S., Alternative problems for nonlinear functionnal equations, *J. Diff. Eqns.* 4, 40～56(1968).

70. Плисс В. А., *Дифф. Уравн.*, 1(1), 17～24(1965).

71. Nustrov V. S. (Нустров В. С.), Periodic solutions of a nonlinear systems, Mechanics Rigid Bodies, 2, 56～62(1969) (in Russian).

72. Kransnoseliskii M. A. (Красносельский М. А.), *Positive Solutions of Operator Equations*, P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands (1964).

73. Плисс В. А., *Дифф. Уравн.*, 1(11), 1122～1138(1965).

74. Пасынкова И. А., *Дифф. Уравн.*, 5(1), 1984～1989(1969).

75. Berger M. S., On periodic solutions of second order Hamiltonian systems (I), *J. Math. Analysis Applic.* 29, 512～522(1970).

76. Weinstein A., Lagrangian submanifolds and Hamiltonian Systems, *Ann. Math.* 98, 377～410(1973).

77. Weinstein A., Normal modes for nonlinear Hamiltonian systems, *Inven. Math.* 20, 47～57(1973).

78. Moser J., Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by A. Weinstein, *Comm. pure appl. Math.* 29, 727～747(1976).

79. Rabinowitz P. H., Periodic solutions of Hamiltonian systems, *Comm pure appl. Math.* 31(2), 157～184(1978).

80. Наймарк Ю. И., *ДАН СССР*, 172(5), (1967).

81. Гаврилов Н. К. и Шильников Л. П., *Мат. Сбор.*, 88(130), №4(8), (1972).

82. Иванов Б. Ф., *Дифф. Уравн.*, 15(3), 548～550(1979).

83. Чернышев В. Е., Существование замкнутых траекторий в окрестности инвариантного тора, *Дифф. Уравн.*, Т. XV, № 9, 1620～1631(1979).

84. Колмогоров А. Н., О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции гамильтона, *ДАН СССР*. Т. 98, №4, 527～530(1954).

85. Arnold V. I. (Арнольд В. И.), Small denominators I, Mapping the circle onto itself, *Изв. АН СССР*, 25, 21～86 (1961); Small denominators II, Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian, УМН, 18(5)(1963); Small denominators III, Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, УМН, 18(6)(1963).

86. Moser J., A new method for the construction of solutions of n nonlinear differential equations, *Matematika* 6(4), 3～10(1962); On invariant curves in area-preserving maps of a annulus, *Matematika* 6(5), 51～67 (1962).

87. Cronin J., Periodic solutions in n dimensions and Volterra equations, *J. Diff. Eqns.* 19, 21～35(1975).

88. Cronin J., Some mathematics of biological oscillations, *SIAM Rev.* 19 (1) 100～138(1977).

89. Cronin J., A criterion for asymptotic stability, *J. Math. Analysis Applic.* 74, 247～269(1980).

90. Friedrichs K. O. & Wasow W. R., Singular perturbations of nonlinear oscillations, *Duke Math. J.* 13, 367～381(1946).

91. Levinson N., Perturbations of discontinuous solutions of nonlinear systems of differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 33, 214～218(1947).

92. Levinson N., Perturbations of discontinuous solutions of nonlinear systems of differential equations, *Acta Math.* 82, 71～106(1950).

93. Wasow W., On the construction of periodic solutions of singular perturbation problems, *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Annals of*

Math. Studies, vol. 20, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 313～350 (1950).

94. Pontryagin L. S. (Понтрягин Л. С.), Periodic solutions of a system of ordinary differential equations with a small parameter in the terms containing the derivatives, *ДАН СССР* 132, 537～540 (1960).

95. Cesari L., *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin (1973).

96. Sinai Ja. G. & Vul E. B., Discovery of closed orbits of dynamical systems with the use of computer, *J. Statistical Physics*, 23 (1), 27～47 (1980).

97. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I. & Maier A. G., *Qualitative Theory of Second Order Dynamical Systems*, J. Wiley, New York (1973).

98. Demidowitsch W. B., Eine Verallgemeinerung des Kriteriums von Bendixson, *Z. angew. Math. Mech.* 46 (2), 145～146 (1966).

99. Леонов, Г. А., *Дифф. Уравн.*, 13 (2), 367～368 (1977).

100. Cronin J., Suppresion of oscillations in nonlinear systems, *International Conference on Differential Equations*, Univ. of Southern California, Sept. 1974 (Antosiewicz, Editor).

101. Якубович В. А., *Автомат. Телемех.*, 5, 601～612 (1964).

102. Cronin J., Periodic solutions in n dimensions and Volterra equations, *J. Diff. Eqns.* 19, 21～35 (1975).

103. Borg G., A condition for the existence of orbitally stable solutions of dynamical systems, *Kungl. Tekn. Hogsk. Handl.* Stockholm No. 153 (1960).

104. 秦元勋，一个三阶非线性系统的振荡，《科学纪录》，3 (6)，163～166 (1959).

105. 李炳熙，负反馈细胞控制系统的极限环的唯一性与稳定性，《应用数学学报》，3 (2)，185～193 (1980).

106. Li Bingxi, Uniqueness and stability of a limit cycle for a third order dynamical system arising in neuron modeling, *Nonlinear Analysis, TMA*, 5 (1), 13～19 (1981).

107. Miller R. K., *Nonlinear Volterra Integral Equations*, Benjamin, New York (1971).

108. Stein R. B., Leung K. V., Mangeron D. & Oğuztoreli M. N., Improved neuronal models for studying neural networks, *Kybernetik* 15, 1～9 (1974).

109. Hastings S. P., On the uniqueness and global asymptotic stability of periodic solutions for a third order system, *Rocky Mountain J. Math.* 7 (3), 513～538 (1977).

110. Franke J. E. & Selgrade J. F., A computer method for verification of asymptotically stable periodic orbits, *SIAM J. Math. Analysis* 10, 614～628 (1979).

111. Churchill R. C. & Selgrade J. F., On the Poincaré criterion for asymptotic stability, *SIAM J. Math. Analysis* 10 (6), 1293～1298 (1979).

112. Urabe Minoru, *Nonlinear Autonomous Oscillations*, Acadamic Press, New York (1967).

113. Denjoy, A., Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *J. Math. Pures Appl*, 11, 333～375 (1932).

114. Birkhoff, G. D., *Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., Vol. 9., 第1.5节.

115. Watson, G. N., *Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge.

116. Булгаков, В. И., *Дифф. Уравн.*, Т. XIII, №. 8, 1507～1508 (1977).

117. Parris, R., A three-dimensional system with knotted trajectories, *Amer. Math. Monthly*, 84, No.6, 468～469 (1977).

118. Posor, И. Г., Об автономных трехмерных системах с заузленными траекториями и предельными циклами различных видов, *Дифф. Уравн.*, Т. XVII, № 6, 994～999 (1981).

119. Hirsch, M. W., Systems of differential equations which are competitive or cooperative, I: Limit sets, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 13, No. 2, 167～179 (1982).

120. Newman, M. H. A., *Elements of the topology of plane sets of points*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1951).

121. Cronin, J., A Criterion for asymptotic stability, *J. Math. Anal. Appl.*, 74, 247～269 (1980).

122. Ortega, M., Rheinboldt, W. C., *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press (1970).

123. Dulac, H., *Comp. Rend.*, 204, 1703～1706 (1937).

124. Smith, R. A., An index theorem and Bendixson's negative criterion for certain differential equations of higher dimension, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 91A, 63～77 (1981).

125. Oatly, K. & Goodwin, B. C., The explanation and investigation of biological rhythms, in *Biological Rhythms and Human Performance*, W. P. Colquhoum, ed., Academic Press, New York, Chap. 1 (1971).

126. Njus, D., Sulzman, F. M. & Hastings, J. W., Membrane model for the circadian clock, *Nature*, 248, 116～119 (1974).

127. Hastings, J. W., Are circadian rhythms conditional?, Abstract, *Proc of the 11th Conf. on the Internat. Soc. for Chronobiology*, Hanover, Germany (1973).

128. Brown, F. A., Jr., Hastings, J. W. & Palmer, J. D., *The biological clock, Two Views*, Academic Press, New York, p. 86 (1970).

129. Marden, M., *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable, Mathematical Surveys* No.3, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, p. 141 (1949).

130. Alexandroff & Hopf, *Topologie*, Springer, Berlin (1935).
131. Cesari, L., *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, 3rd Edition, Springer-Verlag, Berlin, p.35(1971).
132. Danziger, L. & Elmergreen, G. L., The Thyroidpituitary Homeostatic Mechanism, *Bull. Math. Biophysics*, 18, 1～13(1956).
133. Rashevsky, N., *Some Medical Aspects of Mathematical Biology*, Charles C. Thomas, Springfield, Illinois (1964).
134. Cronin, J., The Danziger-Elmergreen theory of periodic catatonic Schizophrenia, *Bull. Math. Biology*, 35, 689～707(1973).
135. Kurth, R., A generalization of Bendixson's criterion, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 54(8), 533～535(1974).
136. 张筑芬，R^3 上一个以 Antoine 项链为极小集合的拓扑动力系统，中国科学，A辑，第五期，391～398(1982).
137. Hocking, J. G. & Young, G. S., *Topology*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1961).
138. May, R. M. & Leonard, W. J., Nonlinear aspects of competition between three species, *SIAM J. Appl. Math.*, 29, 243～253(1975).
139. Fuller, F. B., On the surface of section and periodic trajectories, *Amer. J. Math.*, 87, 473～480(1965).
140. Mallet-Paret, J. & Yorke, J. A., Snakes: oriented families of periodic orbits, their sources, sinks, and continuation, *J. Diff. Equation*, Vol. 43, No. 3, 419～450(1982).
141. Nirenberg, L., *Topics in Nonlinear Functional Analysis*, Courant Institute of Math. Sciences, New York (1974).
142. Гантмахер, Ф. Р., *Теория Матриц* (有中译本：柯召译，《矩阵论》，高等教育出版社，1957).
143. Rabinowitz, P. H., Periodic solutions of Hamiltonian systems: A survey, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 13, No. 3, 343～352(1982).
144. Lorenz, E. N., Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmospheric Sci.*, 20, 130～141(1963).
145. Ruelle, D. & Takens, F., On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.* 20, 167～192(1971); note, 23, 343～344(1971).
146. McLaughlin, J. B. & Martin, P. C., *Phys. Rev.*, A12, 186(1975).
147. Guckenheimer, J., A strange, strange attractor, *The Hopf Bifurcation Theorem and Its Applications* (J. E. Marsden and M. McCracken, eds.) Springer-Verlag, Berlin and New York, 368～381(1976).
148. Lanford, O., Computer picture of the Lorenz attractor, in *Turbulence Seminar*, Lecture Notes in Math., Vol. 615, Springer-Verlag, 113～116 (1977).
149. Shimizu, T. & Morioka, N., *Phys. Lett.*, 66A, 182, 447(1978).
150. Williams, R. F., The structure of Lorenz attractors, *Inst. Hautes Etudes Sci*

Publ. Math., 50, 73～99 (1979).

151. Ruelle, D., Differentiable dynamical systems and the problem of turbulence, *Bull of the AMS* (New Series), Vol. 5, No. 1, 29～42(1981).
152. 廖山涛，微分动力体系的两个方面：理论与实际，1982 年全国数学会(沈阳)会议上的报告稿，北京大学数学系(1982 年 9 月).
153. Field, R. J., A reaction periodic in time and space. A lecture demonstration, *J. Chem. Educ.*, 49, 308～311(197)
154. Kalman, R. E., Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, Vol. 49, No. 2, 201～205(1963).
155. Brockett, R. W., *Finite-dimensional Linear System*, Wiley (1970).
156. Schmelzer, S., Lectures on the theory and design of an alternating-gradient proton-synchroton, *Proc. CERN*, 115～125(1958).
157. Abragram, A., *The Principles of Nuclear Magnetism*, Oxford Univ. Press, New York (1961).
158. Vreeke, S. A. & Sandquist, G. M., Phase plane analysis of reactor kinetics, *Nuclear Sci. Engrg.*, 42, 295～305(1970).
159. Poore, A. B., On the dynamical behavior of the two temperature feedback nuclear reactor model, *SIAM J. Appl. Math.*, 30, 675～686(1976).
160. Goodwin, B. C., *Temporal organisation in cells*, Academic Press, London-New York (1963).
161. Griffith, J. S., Mathematics of cellular control processes, I. Negative feedback to one gene, *J. Theorel. Biol.*, 20, 202～208(1968).
162. Jacob, F. & Monod, J., Genetic regulatory mechanisms in the synthesis of proteins, *J. Mol. Biol.*, 3, 318～356(1961).
163. Morales, M. & McKay, D., Biochemical oscillations in "controlled" systems, *Biophys. J.*, 7, 621～625(1967).
164. Weiss, P. & Kavanau, J. L., A model of growth and growth control in mathematical terms, *J. Gen. Physiol.*, 41, 1～47(1957).
165. 阮建成，关于一类自治的人口动态方程的周期解，(1983)(待发表).
166. Williams, J. L., *Stability Theory of Dynamical Systems*, London, Thomas Nelson Ltd. (1970).
167. Oberhettinger, F. & Badii, L., *Tables of Laplace Transforms*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 224～225 (1973).
168. MacCamy, R. C. & Smith, R. L., Limits of solutions of Volterra integral equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81:4, 739～742(1975).
169. Белоусов, Б. П., Сборн. Рефератов по Радиационной Медицине за 1958г., М., 145(1959).
170. Жаботинский, А. М., Периодические окислительные реакции в жидкой фазе, *ДАН СССР*, Т. 157, №2, 392～395(1964).
171. Field, R. J. & Noyes, R. M., Oscillations in chemical systems IV: Limit

cycle behaviour in a model of a real chemical reaction, *J. Chem. Phys.*, 160, 1877～1884(1974).

172. Winfree, A. T., Rotating reactions, *Scientific American*, June(1974).

173. Murray, J. D., On a model for the temporal oscillations in the Belousov-Zhabotinskii reaction, *J. Chem. Phys.* (1974).

174. Michaelis, L. & Menten, M. I., *Biochem. Z.*, 49, 333(1913).

175. Hahn, H., Ortoleva, P. J. & Ross, J., *J. Theoret. Biol.*, 41, 503～521(1973).

176. Hofbauer, J., On the occurrence of limit cycles in Volterra-Lotka equation, *Nonlinear Anal.*, *TMA*, Vol. 5, No.9, 1003～1008(1981).

177. Coppel, W. A., *A survey of quadratic systems*, *J. Diff. Equat.*, 2, 293～304 (1966).

178. Fujii, K., Complexity-stability relationship of two-prey-one-predator species system model: local and global stability, *J. Theoret. Biol.*, 69,613～623(1977).

179. Hofbauer, J., Schuster, P., Sigmund, K. & Wolff, R., Dynamical systems under constant organization II: Homogeneous growth functions of degree $p=2$, *SIAM J. Appl. Math.*, C 38, 282～304(1980).

180. Schuster, P., Sigmund, K. & Wolff, R., On ω-limits for competition between three species, *SIAM J. Appl. Math.*, 37, 49～54(1979).

181. Schuster, P., Sigmund, K. & Wolff, R., Mass action kinetics of selfreplication in flow reactors, *J. Math. Anal. Appl.*, 78, 88～112(1980).

182. Bellman, R., *Introduction to Matrix Analysis*, New York, McGraw-Hill, 278～282(1970).

183. Неймарк, Ю. И., *Мотод Точечных Отображений в Теории Нелинейных Колебаний*, «Наука», Москва (1972).

184. Arnold, E. M., On stability and periodicity in phosphorus nutrient dynamics, *Quart. Appl. Math.*, 139～141 (1980).

185. Swick, K. E., Periodic solutions of a nonlinear age-dependent model of single species population dynamics, *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 11, No. 5, 901～910(1980).

186. Gurtin, M. E. & MacCamy, R. C., Nonlinear age-dependent population dynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 54, 281～300(1974).

187. Gurtin M. E. & MacCamy, R. C., Some simple models for nonlinear age-dependent population dynamics, *Math. Biosci.*, 43, 199～211(1979).

188. Hastings, S., The existence of periodic solutions to Nagumo's equation, *Quart. J. Math.*, *Oxford*(3), 25, 369～378(1974).

189. Kamke, E., Differential Gleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen I, Gewöhnliche Differentialgleichungen(有中译本,《常微分方程手册》, 科学出版社, 1977).

190. Bowman, F., *Introduction to Elliptic Functions with Applications*, John Wiley & Sons, New York (1953).

191. Hadjidemetriou, J. D., The present status of periodic orbits, *Celestial Mechanics*, 23, 277～286(1981).

192. Meyer, K. R., Periodic orbits near infinity in the restricted N-body problem, *Celestial Mechanic*, 23, 69～81(1981).

193. Meyer, K. R., Periodic solutions of the N-body problem, *J. Diff. Equat.*, No.1, 2～38(1981).

194. Lefschetz, S., *Differential Equations: Geometric Theory*, 2nd edition, Interscience, New York, 44(1963).

195. Hastings, H. M., A higher dimensional Poincaré-Bendixson theorem, *Glas. Mat.*, III. Ser., 14 (34), 263～268(1979).

196. Borsuk, K., *Shape Theory*, Monographie Matematyczne, Warszawa (1976).

197. 董镇喜, 二维流形的广义 Poincaré-Bendixson 环域定理(待发表).

198. Camacho, C., A. Poincaré-Bendixson theorem for R^2 actions, *International Symposium on Dynamical Systems*(Salvador, 1971), Academic Press (1973).

199. Markus, L., Lie dynamical systems, Abstract of Invited Address AMS, April, 1972, in BAMS, to appear.

200. 廖山涛, 一个关于周期轨道存在的定理, «北京大学学报»(自然科学), 1, 1～20 (1979).

201. Saito, T., On the measure-preserving flow on the torus, *J. Math. Soc. Japan*, 3:2, 279～284(1951).

202. Гаврилов, Н. И., О динамических системах с инвариантной мерой лебега на поверхности тора, *Дифф. Уравн.*, 12:3, 438～445(1976).

203. Sack, R. J., & Sell, G. R., On the existence of periodic solutions on 2-manifolds, *J. Diff. Equat.*, 11:3, 449～463(1972).

204. Neumann, D. A., Existence of periodic orbits on 2-manifolds, *J. Diff. Equat.*, 27, 313～319(1978).

205. 余澍祥, 二维流形上周期解的存在性, «数学学报» 23:5, 712～719(1980).

206. 董镇喜, 关于二维定向流形上动力系统的周期解的存在问题, «北京大学学报»(自然科学), 6(1982).

207. 董镇喜, 不可定向的二维流形上动力系统周期解的存在性(待发表).

208. Gelb, A. & Vander Velde, W. E., *Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design*, McGraw-Hill, New York(1968).

209. Kudrewicz, J., Mathematical basis of describing function method, *Rozpr. elektrotech.*, 15, 587～624(1969).

210. Bergen, A. R. & Franks, R. L., Justification of the describing function method, *SIAM J. Control*, Vol. 9, No.4, 568～589(1971).

211. Atherton, D. P. & Dorrah, H. T., A survey on non-linear oscillations, *Int. J. Control*, Vol. 31, No. 6, 1041～1105(1980).

212. 李炳熙 (Bingxi Li), Periodic orbits of autonomous ordinary differential equations: Theory and applications, *Nonlinear Analysis, TMA*, Vol.5, No. 9,

931～958(1981).

213. 胡虎翼,周庆涛,钱敏,可逆系统的周期解,《数学学报》,25(6),698～710(1982).

214. Lazer, A. C., Topological degree and symmetric families of periodic solution of nondissipative second-order systems, *J. Diff. Equat.*, 19 (1), 62～69 (1975).

215. Chow, Shui-Nee, & Hale, J. K., *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlay, New York, 1982.

216. Sparrow, C., *The Lorenz Equations, Bifurcations, Chaos and Stranger Attractors*, Springer-Verlay, New York, 1982.

217. 邓诗涛(Deng Shitao), Minimal periodic solutions for a class of Hamiltonian equations, *Proceedings of the 4th International Symposium on Differential Geometry and Differential Equations*, Beijing, Aug.-Sept., 1983.

218. Redheffer, R. & Zhou Zhiming, Global asymptotic stability for a class of many-variables Volterra prey-predator systems, *Nonlinear Analysis*, *TMA*, Vol. 5, No. 12, 1309～1329 (1981).

219. Redheffer, R. & Zhou Zhiming, A class of matrices connected with volterra prey-predator equations, *SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, Vol. 3, No. 1, 122～134 (1982).

220. 周之铭, 一类n维被食者、捕食者方程的极限集和周期解,《第四届国际双微会议讨论会论文集》,1983.

索　　引

SERIES IN MODERN MATHEMATICS

Liu Qi-keng:

Canonical Manifold and Canonical Region

Gu Chao-hao:

Differential Geometry of Homogeneous Space

Xia Dao-xing:

Measure and Integration Theory on Infinite Dimensional Spaces: Abstract Harmonic Analysis

Ye Yan-qian:

Theory of Limit Cycle (second edition)

Su Bu-qing, Liu Ding-yuan:

Computational Geometry

Gong Sheng:

Singular Integral in Several Complex Variables

Li Bing-xi:

Periodic Orbits of Autonomous Ordinary Differential Equations: Theory and Applications